

长郡中学 2023 年上学期高一期中考试

数学参考答案

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	B	C	C	D	A	B

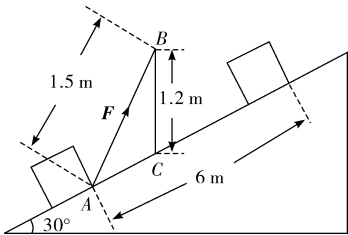
1. D 【解析】若向量 $m=-e_1+ke_2(k\in\mathbf{R})$ 与向量 $n=e_2-2e_1$ 共线,
- 则存在实数 λ ,使 $m=\lambda n,\therefore -e_1+ke_2=\lambda(e_2-2e_1)=-2\lambda e_1+\lambda e_2,\therefore \begin{cases} -1=-2\lambda, \\ k=\lambda, \end{cases}$ 解得 $k=\frac{1}{2}$.
2. C 【解析】设复数 $9-40i$ 的平方根为 $x+yi(x,y\in\mathbf{R})$,则 $(x+yi)^2=9-40i$,
化简得 $x^2-y^2+2xyi=9-40i$,所以 $x^2-y^2=9,2xy=-40$,解得 $x=5,y=-4$ 或 $x=-5,y=4$,即复数 $9-40i$ 的平方根为 $5-4i$ 或 $-5+4i$.
5. C 【解析】由正弦定理得, $\triangle ABC$ 外接圆直径为 $2r=\frac{3}{\sin\frac{\pi}{6}}=6$,得 $r=3$.
- 设球心到平面 ABC 的距离为 d ,则 $d=\frac{1}{2}PA=3$.
- $\therefore$ 三棱锥 $P-ABC$ 的外接球半径为 $R=\sqrt{d^2+r^2}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$.
6. D 【解析】对于①,设平面 $\alpha\cap$ 平面 $ABC=l$,因为 $P\in\alpha,P\in$ 平面 ABC ,
所以 $P\in l$,同理 $Q\in l,R\in l$,故 P,Q,R 三点共线,①正确;
对于②,因为 $a\parallel b$,所以 a,b 可以确定一个平面 α ,
因为 $A\in a,B\in b,a\subset\alpha,b\subset\alpha$,所以 $AB\subset\alpha$,所以 $l\subset\alpha$,又 $C\in l$,
所以 $C\in\alpha$,因为 $c\parallel a$,所以 $c\parallel\alpha$ 或 $c\subset\alpha$,又 $c\cap\alpha=C$,
所以 $c\parallel\alpha$ 不成立,所以 $c\subset\alpha$,即这四条直线共面,所以②正确;
对于③,直线 a,b 异面, b,c 异面,则 a,c 可能平行、相交或异面,所以③错误;
对于④, $a\perp c,b\perp c$,则 a,b 可能平行、相交或异面,所以④错误.

7. A 【解析】 $\angle MPN$ 即为向量 $\overrightarrow{AM}$ 与 $\overrightarrow{BN}$ 的夹角 θ ,设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5$,则 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b},\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,
所以 $|\overrightarrow{AM}|=\frac{\sqrt{39}}{2},|\overrightarrow{BN}|=\frac{\sqrt{21}}{2}$,
所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b})(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=|\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{BN}|\cos\theta$,故 $\cos\theta=\frac{4\sqrt{91}}{91}$.

8. B 【解析】在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理,

$$\frac{AB}{\sin 120^\circ}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}\Rightarrow\sin\angle BAC=\frac{6}{5\sqrt{3}}\Rightarrow\cos\angle BAC=\frac{\sqrt{13}}{5},$$

$$\therefore W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=25\cdot 6\cdot\cos\angle BAC=30\sqrt{13}\text{ J}.$$



二、选择题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分)

题号	9	10	11	12
答案	BCD	BC	ACD	BC

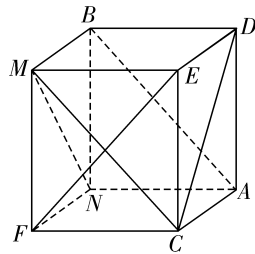
9. BCD 【解析】对于 A, $z^2=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$ 为纯虚数,所以 $\begin{cases} a^2-b^2=0, \\ 2ab\neq 0, \end{cases}$ 即 $a=\pm b\neq 0$,所以 A 错误;
- 对于 B, $\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$,因为 $\frac{1}{z}\in\mathbf{R}$,所以 $b=0$,从而 $z\in\mathbf{R}$,所以 B 正确;
- 对于 C,由复数模的三角不等式可得 $|z|=|(z-i)+i|\leq|z-i|+|i|=2$,所以 C 正确;
- 对于 D, $z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=|z|^2$,所以 D 正确.

11. ACD 【解析】如图所示,将平面图形还原为立体图形,根据正方体的性质知:

$EF \perp MC, MC \parallel AB$,故 $AB \perp EF$,A 正确,B 错误;

EF 与 MN 是异面直线,C 正确;

平面 $MNF \parallel$ 平面 $ACD, MN \subset$ 平面 $MNF, MN \parallel$ 平面 ACD ,D 正确. 故选 ACD.



12. BC 【解析】根据题意得 S 的取值依据所含 a^2 的个数,分三类:有 0 个 a^2 、有 1 个 a^2 、有 2 个 a^2 ,记 $\theta = \langle a, b \rangle$,分别得 S 的取值为: $S_1 = 4|a| \cdot |b| \cos \theta + b^2, S_2 = 2|a| \cdot |b| \cos \theta + a^2 + 2b^2, S_3 = 2a^2 + 3b^2$,则 S 至多有 3 个不同的值,A 错误;

若 $a \perp b$,则 $\theta = 90^\circ$,此时 $S_1 = b^2, S_2 = a^2 + 2b^2, S_3 = 2a^2 + 3b^2$,又 a, b 为非零向量,则 $S_{\min} = S_1 = b^2$,与 $|a|$ 无关,B 对;

若 $|b| > 4|a|$,则 $S_1 > -16|a|^2|\cos \theta| + 16|a|^2 = 16|a|^2(1 - |\cos \theta|) \geq 0$,

$S_2 > -8|a|^2|\cos \theta| + |a|^2 + 32|a|^2 = |a|^2(33 - 8|\cos \theta|) > 0, S_3 > 0$,则 $S_{\min} > 0$,C 对;

若 $|b| = 2|a|$,则 $S_1 = 8|a|^2 \cos \theta + 4|a|^2, S_2 = 4|a|^2 \cos \theta + 9|a|^2, S_3 = 2|a|^2 + 12|a|^2 = 14|a|^2$,

$\therefore S_2 - S_1 = (5 - 4 \cos \theta)|a|^2 > 0, S_3 - S_1 = (10 - 8 \cos \theta)|a|^2 > 0$,

$\therefore S_{\min} = S_1 = 8|a|^2 \cos \theta + 4|a|^2 = 8|a|^2$,解得 $\cos \theta = \frac{1}{2}, \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$,D 错误.

三、填空题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. 1:5

14. $3\sqrt{2}$ 【解析】 $\therefore \vec{OA} = \vec{OC} + \vec{CA} = (2 + \sqrt{2} \cos \alpha, 2 + \sqrt{2} \sin \alpha)$,

则 $|\vec{OA}| = \sqrt{(2 + \sqrt{2} \cos \alpha)^2 + (2 + \sqrt{2} \sin \alpha)^2} = \sqrt{4\sqrt{2}(\sin \alpha + \cos \alpha) + 10} = \sqrt{8\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) + 10}$,

当 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = 1$ 时, $|\vec{OA}|$ 有最大值,且为 $3\sqrt{2}$.

15. (2,4)

16. $\frac{\sqrt{5}}{10}$ 【解析】如图,在棱 CC_1 上取一点 H ,使得 $CC_1 = 4CH$,取 CC_1 的中点 G ,连接 BG, A_1, HF, DH ,

由于 G, E 分别是棱 CC_1, BB_1 的中点,所以 $BE = C_1G, BE \parallel C_1G$,故四边形 BGC_1E 为平行四边形,进而 $C_1E \parallel BG$,

又因为 F, H 分别是 BC, CG 的中点,所以 $HF \parallel BG$,所以 $HF \parallel C_1E$,则 $\angle DFH$ 或其补角是异面直线 DF 与 C_1E 所成的角.

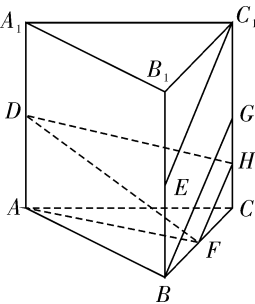
设 $AB = 4$,则 $CF = 2, CH = 1, AD = 2$,

从而 $HF = \sqrt{CF^2 + CH^2} = \sqrt{5}, DH = \sqrt{AC^2 + (AD - CH)^2} = \sqrt{17}$,

$AF = \sqrt{AB^2 - BF^2} = 2\sqrt{3}, DF = \sqrt{AF^2 + AD^2} = 4$,

故 $\cos \angle DFH = \frac{16 + 5 - 17}{2 \times 4 \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$,

故异面直线 DF 与 C_1E 所成角的余弦值是 $\frac{\sqrt{5}}{10}$.



四、解答题(本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 【解析】(1) $\therefore z_1 = (a + i)^2, z_2 = 4 - 3i, z_1 = iz_2$,

$\therefore (a + i)^2 = a^2 - 1 + 2ai = 3 + 4i$,从而 $\begin{cases} a^2 - 1 = 3, \\ 2a = 4, \end{cases}$ 解得 $a = 2$; (5 分)

(2) 依题意得: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + i)^2}{4 - 3i} = \frac{(a + i)^2(4 + 3i)}{(4 - 3i)(4 + 3i)}$
 $= \frac{(a^2 + 2ai + i^2)(4 + 3i)}{4^2 - (3i)^2} = \frac{4a^2 + 8ai + 4i^2 + 3a^2i + 6ai^2 + 3i^3}{16 - (-9)}$
 $= \frac{(4a^2 - 6a - 4) + (3a^2 + 8a - 3)i}{25}$,

因为 $\frac{z_1}{z_2}$ 是纯虚数,所以 $\begin{cases} 4a^2 - 6a - 4 = 0, \\ 3a^2 + 8a - 3 \neq 0, \end{cases}$ 从而 $a = 2$ 或 $a = -\frac{1}{2}$; (7 分)

又因为 a 是正实数,所以 $a = 2$.

当 $a = 2$ 时, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4a^2 - 6a - 4 + 8ai + 3a^2i - 3i}{25} = \frac{16i + 12i - 3i}{25} = i$, (8 分)

因为 $i^1=i, i^2=-1, i^3=-i, i^4=1, \dots, i^{4n+1}=i, i^{4n+2}=-1, i^{4n+3}=-i, i^{4n}=1, n \in \mathbf{N}$,

所以 $\frac{z_1}{z_2} + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2022} = i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{2022}$
 $= i + i^2 + (i^3 + i^4 + i^5 + i^6) + (i^7 + i^8 + i^9 + i^{10}) + \dots + (i^{2019} + i^{2020} + i^{2021} + i^{2022})$
 $= i + i^2 + 0 + 0 + \dots + 0 = -1 + i,$
所以 $\frac{z_1}{z_2} + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2022} = -1 + i.$ (10 分)

18. 【解析】(1) 因为 $\angle BAC = 180^\circ - 105^\circ - 45^\circ = 30^\circ$,

在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}, \frac{50}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 45^\circ},$
所以 $AC = 50\sqrt{2}$ m; (6 分)

(2) 在 $\triangle DCA$ 中, 因为 $\angle DAC = 90^\circ, \frac{AD}{AC} = \tan \alpha,$

所以 $AD = AC \tan 75^\circ = 50\sqrt{2} \tan 75^\circ,$

又因为 $\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 + \sqrt{3},$

所以 $AD = 50\sqrt{2}(2 + \sqrt{3}) = 100\sqrt{2} + 50\sqrt{6}$ m. (12 分)

19. 【解析】(1) 在直角三角形 ABC 中, 由 $BC = 2, \tan \angle ABC = 2\sqrt{2},$

即 $\tan \angle ABC = \frac{AC}{BC} = 2\sqrt{2},$ 得 $AC = 4\sqrt{2},$ 若以 AC 为轴旋转一周,

形成的几何体为以 $BC = 2$ 为半径, 高 $AC = 4\sqrt{2}$ 的圆锥,

则 $AB = \sqrt{2^2 + (4\sqrt{2})^2} = 6,$ 其表面积为 $S = \pi \times 2^2 + \frac{1}{2} \times 2\pi \times 2 \times 6 = 16\pi;$ (6 分)

(2) 由问题(1)的圆锥, 要使蚂蚁爬行的距离最短, 则沿点 B 的母线把圆锥侧面展开为平面图形, 最短距离就是点 B 到点 B_1 的距离, $\angle BAB_1 = \frac{2\pi \times 2}{6} = \frac{2\pi}{3},$

在 $\triangle ABB_1$ 中, 由余弦定理得 $BB_1 = \sqrt{6^2 + 6^2 - 2 \times 6 \times 6 \times \cos \frac{2\pi}{3}} = 6\sqrt{3}.$ (12 分)

20. 【解析】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, $A + B + C = \pi,$

$\therefore a \cdot \sin A - a \cdot \sin B = c \cdot \sin C - b \cdot \sin B,$

则由正弦定理得: $a^2 - ab = c^2 - b^2,$ 即 $a^2 + b^2 - c^2 = ab,$

由余弦定理得: $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2} > 0, 0 < C < \frac{\pi}{2},$ 则 $C = \frac{\pi}{3},$

$\therefore \sin C + \sin(B - A) = \sin 2A, \therefore \sin(A + B) + \sin(B - A) = 2\sin A \cdot \cos A,$

$\therefore \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B - \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B = 2\sin A \cdot \cos A,$

$\therefore 2\cos A \cdot \sin B = 2\sin A \cdot \cos A, \therefore \cos A \neq 0, \therefore \sin B = \sin A,$ 即 $A = B,$

当 $A = B$ 时, $\triangle ABC$ 为正三角形, $a = b = c = 2, \therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3};$ (6 分)

(2) 由余弦定理可知: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C, \therefore c = 2, C = \frac{\pi}{3}, \therefore a^2 + b^2 = ab + 4,$

$\therefore AB$ 边的中点为 $M, \therefore \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}),$

$\therefore |\overrightarrow{CM}|^2 = \frac{1}{4}(|\overrightarrow{CA}|^2 + |\overrightarrow{CB}|^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{4}(b^2 + a^2 + 2ab \cdot \cos C) = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + ab),$

$\therefore |\overrightarrow{CM}|^2 = \frac{1}{4}(2ab + 4) = \frac{1}{2}ab + 1,$ 又 $\therefore a^2 + b^2 \geq 2ab, \therefore ab + 4 \geq 2ab, \therefore ab \leq 4,$

$\therefore |\overrightarrow{CM}|^2 \leq 3, \therefore |\overrightarrow{CM}| \leq \sqrt{3},$ 当且仅当 $a = b = 2$ 时, 等号成立,

故 $|CM|$ 的最大值为 $\sqrt{3}.$ (12 分)

21.【解析】(1) 设 BA 的中点为 E , 显然 $BA \perp OE$,

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EO}) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{EO} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 = 18,$$

$$\text{由 } \overrightarrow{AO} = m \overrightarrow{AB} + n \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = m \overrightarrow{AB}^2 + n \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow 18 = 36m + n \cdot 6 \times 2 \times \frac{1}{2} \Rightarrow 6m + n = 3,$$

设 AC 的中点为 F , 显然 $CA \perp OF$,

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FO}) \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{FO} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}^2 = 2,$$

$$\text{由 } \overrightarrow{AO} = m \overrightarrow{AB} + n \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = m \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + n \overrightarrow{AC}^2 \Rightarrow 2 = m \cdot 6 \times 2 \times \frac{1}{2} + 4n \Rightarrow 3m + 2n = 1,$$

$$\text{即 } \begin{cases} 6m + n = 3, \\ 3m + 2n = 1 \end{cases} \Rightarrow n = -\frac{1}{3}, m = \frac{5}{9}; \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

(2) 因为 O 是 $\angle BAC$ 的平分线上某点,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AO} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right) = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{6} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2} \right) (\lambda > 0), \text{ 所以由 } \overrightarrow{AO} = m \overrightarrow{AB} + n \overrightarrow{AC} \Rightarrow m = \frac{1}{6} \lambda, n = \frac{1}{2} \lambda,$$

$$\text{由 } m + \frac{3}{n} = \frac{1}{6} \lambda + \frac{6}{\lambda} \geq 2 \sqrt{\frac{1}{6} \lambda \cdot \frac{6}{\lambda}} = 2, \text{ 当且仅当 } \frac{1}{6} \lambda = \frac{6}{\lambda} \text{ 时取等号, 即 } \lambda = 6 \text{ 时取等号, 此时 } m = 1, n = 3,$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + 3 \overrightarrow{AC} \Rightarrow |\overrightarrow{AO}| = \sqrt{(\overrightarrow{AB} + 3 \overrightarrow{AC})^2} = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 + 9 \overrightarrow{AC}^2 + 6 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}},$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{AO}| = \sqrt{36 + 9 \times 4 + 6 \times 6 \times 2 \times \frac{1}{2}} = 6\sqrt{3}. \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

22.【解析】(1) $\because PO \perp$ 平面 $ABCD, AC \subset$ 平面 $ABCD, \therefore PO \perp AC$,

$\because$ 在菱形 $ABCD$ 中, $AC \perp BD$, 且 $BD \cap PO = O, BD, PO \subset$ 平面 PBD ,

$\therefore AC \perp$ 平面 $PBD, \because AC \subset$ 平面 $ACE, \therefore$ 平面 $ACE \perp$ 平面 $PBD; \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$

(2) 连接 OE , 则平面 $ACE \cap$ 平面 $PBD = OE$,

由(1)知 $AC \perp$ 平面 PBD , 则 $AC \perp OE, AC \perp OP, OC \perp PD$,

故 $\angle POE$ 是二面角 $P-AC-E$ 的平面角.

$\because CE \perp PD, CE \cap OE = E, CE, OE \subset$ 平面 OCE ,

$\therefore PD \perp$ 平面 $OCE, \therefore PD \perp OE$.

在菱形 $ABCD$ 中, $AB = 2, \angle ABC = 60^\circ$, 则 $\triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\text{则易知 } OD = OB = \sqrt{3}, \text{ 又 } OP = 2, \therefore PD = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7},$$

$$\text{故 } OE = \frac{OP \cdot OD}{PD} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7},$$

$$\therefore \cos \angle POE = \frac{OE}{OP} = \frac{\sqrt{21}}{7}, \text{ 即二面角 } P-AC-E \text{ 的余弦值为 } \frac{\sqrt{21}}{7}. \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

