绝密★启用前（新高考卷）

数学参考答案

1.【答案】B

【解析】$z=\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}=\frac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(\mathrm{i}-1)(1+\mathrm{i})}=\frac{-1+\mathrm{i}}{-2}=\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}$，$\bar{z}=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}$，$|\bar{z}-\mathrm{i}|=\left|\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.【答案】C

【解析】$M=\{x|-1<x<3\}$，$N=\{x|x<3\}$，所以 $M\cap N=\{x|-1<x<3\}$.

3.【答案】A

【解析】因为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为单位向量，所以 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4|\boldsymbol{b}|^2=5-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

4.【答案】C

【解析】当列车行驶的距离为 s 时，车轮转过的角度为 $\frac{s}{R}$，此时 P 到铁轨上表面的距离为 $R-R\cos\frac{s}{R}=R(1-\cos\frac{s}{R})$.

5.【答案】C

【解析】**方法 1：** 由 $x^2+y^2=2x$，得 $(x-1)^2+y^2=1$，表示圆心坐标为 $(1,0)$，半径为 1 的圆，且 $\frac{y}{x+2}$ 的几何意义为过点 $(-2,0)$ 和该圆上一点的直线的斜率，所以当该直线与圆相切于第一象限时 $\frac{y}{x+2}$ 的值最大，由几何关系可知最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

方法 2： 设 $y=k(x+2)(x\neq-2)$，代入 $x^2+y^2=2x$ 并化简得

$(1+k^2)x^2+2(2k^2-1)x+4k^2=0$，由 $\Delta=4(2k^2-1)^2-16k^2(1+k^2)\geqslant 0$ 解得

$k\in[-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}]$.

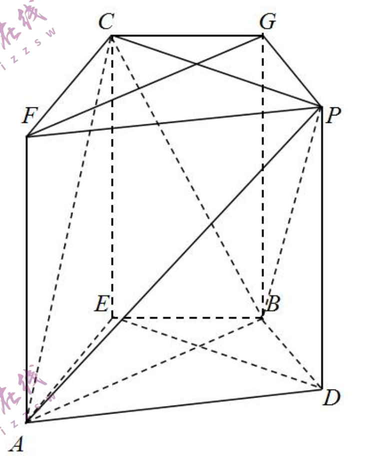
6.【答案】D

【解析】$S_7=7a_4<0$，$a_4<0$，因为 $a_7>0$，所以 a_5，a_6 的符号不确定，而 $a_3<0$，$a_8>0$，所以 a_3+a_6，a_5+a_8 的符号不确定；$S_7-S_4=a_5+a_6+a_7=3a_6$，若 $a_6<0$，则 $S_7<S_4$；设公差为 d，则 $d>0$，所以 $S_{14}-3a_9=7(a_7+a_8)-3a_9=11a_7+d>0$.

7.【答案】D

【解析】设 $g(x)=xf(x)$，则 $g(1)=f(1)=1$，$g'(x)=f(x)+xf'(x)$，因为 $-\frac{1}{x}<f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 单调递减，且 $1+xf'(x)>0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>f(1)=1$，$g'(x)>1+xf'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，故 $g(\ln2)=\ln2f(\ln2)<g(1)=1$，即 $f(\ln2)<\frac{1}{\ln2}=\log_2 e$；$g(\frac{1}{\pi})=\frac{1}{\pi}f(\frac{1}{\pi})<g(1)=1$，即 $f(\frac{1}{\pi})<\pi$；由于 $f(x)$ 单调递减，所以 $f(\lg2)>f(1)=1>\frac{2}{e}$；$g(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})<g(1)=1$，即 $f(\frac{1}{2})<2<e$，故 D 正确.

8.【答案】A



【解析】每个底面四个顶点共圆的直四棱柱的所有顶点必在同一球面上，如图，假设由三棱锥 $P-ABC$ 可以补成一个直四棱柱 $ADBE-FPGC$，且底面四边形 $ADBE$ 存在外接圆，因为 $AC=PA$，$BC=PB$，所以 $AE=AD$，$BE=BD$，所以 $\triangle ABE\cong\triangle ABD$，$\angle AEB=\angle ADB$，且 $\angle AEB+\angle ADB=180^\circ$，所以 $\angle AEB=\angle ADB=90^\circ$，$AB$ 为四边形 $ADBE$ 的外接圆直径. 设四棱柱的侧棱长为 h，则 $AE^2=11-h^2$，$BE^2=9-h^2$，所以 $AE^2+BE^2=20-2h^2=AB^2=4$，$h=2\sqrt{2}$，所以 $AE=AD=\sqrt{3}$，$BE=BD=1$，所以 $\angle BAE=\angle BAD=30^\circ$，$\angle EAD=60^\circ$，$\triangle ADE$ 是等边三角形，$DE=AE=\sqrt{3}=PC$，故假设成立，所以四边形 $ABGF$ 的两条对角线的交点即为所在球的球心. 易知球半径 $R=\sqrt{3}$，所以球的体积为 $\frac{4\pi R^3}{3}=4\sqrt{3}\pi$.

9.【答案】BCD

【解析】若 $\sin x=\frac{3}{5}$，其中 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，则 $\cos x=-\frac{4}{5}$，$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{3}{4}$，故 A 错误；$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=-\frac{4}{5}$，且 $\frac{x}{2}\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，则 $\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，故 B 正确；$\sin 2x=2\sin x\cos x=-\frac{24}{25}$，故 C 正确；$\cos(x-\frac{\pi}{4})=\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$，故 D 正确.

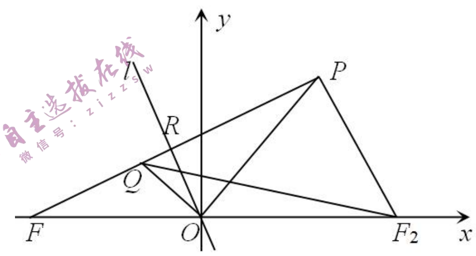
10.【答案】ABC

【解析】在 a 上任取一点 A，过 A 作直线 b'，使 $b'\,/\!/\,b$，由 a，b' 所确定的平面记为 α，

则 $c\perp\alpha$，同理可确定 β，使 $b\subset\beta$，且 $c\perp\beta$，故 A 正确；在 a 上任取一点 A，过 A 作直线 b'，使 $a'\,/\!/\,c$，由 a，a' 所确定的平面记为 α，则 $c\,/\!/\,\alpha$，同理可却确定 β，使 $b\subset\beta$，且 $c\,/\!/\,\beta$，故 B 正确；存在平面 γ，使 $a\,/\!/\,\gamma$，$b\,/\!/\,\gamma$，且 $c\perp\gamma$，故 C 正确；存在两个平面 γ，使 $c\subset\gamma$，且 a，b 与 γ 所成角相等，故 D 错误；

11.【答案】AC

【解析】如图，设 FP 与渐近线 l 交于点 R，F_2 为右焦点，则 R 为线段 FP 的中点，由三角形中位线定理可知 $l\,/\!/\,PF_2$，又因为 $PF\perp l$，所以 $FP\perp F_2P$．由几何关系可知 $|FR|=b$，所以 $|FP|=2b$，$|F_2P|=2b-2a$，$(2b)^2+(2b-2a)^2=|FF_2|^2=4a^2+4b^2$，故 $b=2a$，C 的渐近线方程为 $y=\pm2x$，且 $|FP|=4a$，$|F_2P|=2a$，



$S_{\triangle POF}=\frac{1}{2}S_{\triangle PFF_2}=\frac{1}{4}|PF|\cdot|PF_2|=2a^2$．

设 $|FQ|=m$，则 $|PQ|=4a-m$，$|F_2Q|=m+2a$，

在直角 $\triangle PQF_2$ 中有，$|PQ|^2+|F_2P|^2=|F_2Q|^2$，即

$(4a-m)^2+4a^2=(m+2a)^2$，则 $m=\frac{4}{3}a$，$|PQ|=\frac{8}{3}a$，$|F_2Q|=\frac{10}{3}a$，所以 $|FQ|:|PQ|=1:2$，设 C 的半焦距为 c，则 $c=\sqrt{5}a$，由对称性可知 $|OP|=|OF|=c=\sqrt{5}a$，且 $|OQ|<|OF|=|OP|$，故 $|OQ|<|OP|<|PQ|$，所以 $\triangle POQ$ 不是等腰三角形．

12.【答案】ACD

【解析】因为 $\frac{1}{1+x}<\ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x}$，令 $x=8$，$\frac{1}{1+8}=\frac{1}{9}<\ln(1+\frac{1}{8})=\ln\frac{9}{8}$，所以 $e^{\frac{1}{9}}<\frac{9}{8}$，令 $x=9$，$\ln(1+\frac{1}{9})=\ln\frac{10}{9}<\frac{1}{9}$，所以 $\frac{10}{9}<e^{\frac{1}{9}}$，故 A 正确；因为 $\ln(1+\frac{1}{x})=\ln\frac{x+1}{x}<\frac{1}{x}$，所以 $\ln\frac{2}{1}<1$，$\ln\frac{3}{2}<\frac{1}{2}$，…，$\ln\frac{10}{9}<\frac{1}{9}$，以上各式相加有 $\ln10<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{9}$，故 B 错误；由 $\ln(1+\frac{1}{x})=\ln\frac{x+1}{x}<\frac{1}{x}$ 可得，$x\ln(x+1)-(x-1)\ln x-1<\ln x$，所以 $\ln2-1<\ln1$，$2\ln3-\ln2-1<\ln2$，$3\ln4-2\ln3-1<\ln3$，…，$9\ln10-8\ln9-1<\ln9$，以上各式相加有 $9\ln10-9<\ln9!$，所以 $e^{\ln10^9-9}=\frac{10^9}{e^9}=\left(\frac{10}{e}\right)^9<9!$，故 C 正确；由 $\ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x}$ 可得，$(1+\frac{1}{x})^x<e$，所以 $\frac{C_9^0}{9^0}+\frac{C_9^1}{9^1}+\cdots+\frac{C_9^9}{9^9}=(1+\frac{1}{9})^9<e$，设 $k,n\in\mathbf{N}^*$，$k\leqslant n$，易知 $\frac{C_n^k}{n^k}\leqslant1$，

则$\left(\dfrac{C_n^k}{n^k}\right)^2\leqslant\dfrac{C_n^k}{n^k}$，故$\left(\dfrac{C_9^0}{9^0}\right)^2+\left(\dfrac{C_9^1}{9^1}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{C_9^9}{9^9}\right)^2<\dfrac{C_9^0}{9^0}+\dfrac{C_9^1}{9^1}+\cdots+\dfrac{C_9^9}{9^9}<e$，故 D 正确.

13.【答案】-2

【解析】$f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{x}-1$，其中$y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{x}$是奇函数，所以$f(\dfrac{1}{e})+f(-\dfrac{1}{e})=-2$.

14.【答案】$\dfrac{5}{3}$

【解析】**方法 1：**多面体A_1C_1-AEFC的体积等于三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积与三棱台$EBF-A_1B_1C_1$的体积之差，其中三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积为4，三棱台$EBF-A_1B_1C_1$的体积为$\dfrac{7}{3}$，所以多面体A_1C_1-AEFC的体积为$\dfrac{5}{3}$.

方法 2：所求体积为$V_{A_1-AEF}+V_{F-ACC_1A_1}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle AEF}\cdot AA_1+\dfrac{1}{3}S_{ACC_1A_1}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{5}{3}$.

15.【答案】$\dfrac{13}{15}$

【解析】设事件M为 A 灯亮，事件N为 B 灯亮，事件X为开关甲闭合，事件Y为开关乙闭合，事件Z为开关丙闭合，则$P(N|M)=\dfrac{P(NM)}{P(M)}$，

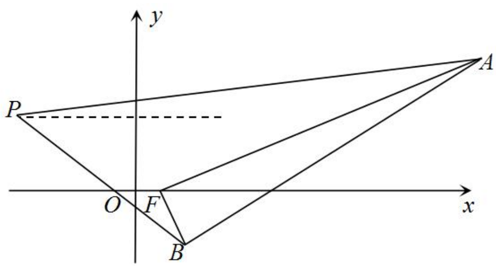
其中$P(NM)=P(X)+P(\overline{X})P(Y)P(Z)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{13}{24}$，

$P(M)=P(X\cup Z)=P(X)+P(Z)-P(X)P(Z)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{8}$，

所以$P(N|M)=\dfrac{13}{15}$.

16.【答案】108

【解析】如图，易知C的焦点为$F(1,0)$，显然当$AB\perp x$轴时，AF不垂直于BF，设过点$(7,0)$的直线l的斜率为$k(k>0)$. 则$l:y=k(x-7)$，将$y=k(x-7)$代入$y^2=4x$，得$k^2(x-7)^2=4x$，即



$k^2x^2-2(7k^2+2)x+49k^2=0$. 设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=\dfrac{2(7k^2+2)}{k^2}$，$x_1x_2=49$，

$\overrightarrow{FA}=(x_1-1,y_1)$，$\overrightarrow{FB}=(x_2-1,y_2)$，所以$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=(x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2=0$，解得$k^2=\dfrac{1}{2}$.

设 PA，PB 与 x 轴正方向的夹角分别为 α，β，由抛物线的光学性质可知 $\angle APB=\alpha+\beta$，$\angle AFB=2\alpha+2\beta=\dfrac{\pi}{2}$，故 $\angle APB=\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，且由圆的性质可知 $\angle AQB=2\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\triangle QAB$ 是等腰直角三角形，其中 $|AQ|=|BQ|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|AB|$，且 $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=12\sqrt{3}$，故

$$S_{\triangle QAB}=\frac{1}{2}|AQ|\cdot|BQ|=\frac{|AQ|^2}{2}=\frac{|AB|^2}{4}=108.$$

17.（10 分）

【解析】（1）设内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，

由正弦定理可知 $2a=c$， ……1 分

由余弦定理可知 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{5a^2-b^2}{4a^2}=\dfrac{11}{16}$， ……2 分

解得 $b=\dfrac{3}{2}a$， ……3 分

又因为 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{3\sqrt{15}}{16}$， ……4 分

所以由正弦定理可知 $\sin A=\dfrac{2}{3}\sin B=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$. ……5 分

（2）设 $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆的半径分别为 R，r，

由（1）及正弦定理可知 $\dfrac{a}{\sin A}=2R$，故 $R=\dfrac{4\sqrt{15}a}{15}$， ……7 分

由三角形面积公式可知：$S_{\triangle ABC}=\dfrac{bc\sin A}{2}=\dfrac{3\sqrt{15}a^2}{16}$， ……8 分

且 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=\dfrac{9}{2}a$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{9}{2}ar=\dfrac{3\sqrt{15}a^2}{16}$，故 $r=\dfrac{\sqrt{15}a}{12}$， ……9 分

所以 $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆的面积之比为 $\dfrac{\pi R^2}{\pi r^2}=(\dfrac{R}{r})^2=\dfrac{256}{25}$. ……10 分

18.（12 分）

【解析】（1）由 $2a_n-3a_{n+1}+a_{n+2}=n-1$ 可得：

$a_{n+2}-a_{n+1}+n+1=2(a_{n+1}-a_n+n)$， ……3 分

当 $a_2-a_1+1=0$，即 $a_2=a_1-1$ 时，$\{a_{n+1}-a_n+n\}$ 不是等比数列. ……4 分

当 $a_{n+1}-a_n+n\neq 0$，即 $a_{n+1}\neq a_n-n$ 时，$\{a_{n+1}-a_n+n\}$ 是等比数列. ……5 分

（2）若 $a_1=a_2=1$，则 $a_2-a_1+1=1$，由（1）可知 $\{a_{n+1}-a_n+n\}$ 是等比数列. ……6 分

设 $b_n=a_{n+1}-a_n+n$，则 $b_1=1$，$b_n=a_{n+1}-a_n+n=2^{n-1}$，即 $a_{n+1}-a_n=2^{n-1}-n$. ……8 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=a_n-a_1=2^{n-1}-1-\dfrac{n(n-1)}{2}$， ……10 分

即当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=2^{n-1}-\dfrac{n(n-1)}{2}$， ……11 分

当 $n=1$ 时，$a_1=1=2^{1-1}-\dfrac{1\times(1-1)}{2}$，故对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_n=2^{n-1}-\dfrac{n(n-1)}{2}$. ……12 分

19.（12 分）

【解析】（1）根据列联表得：$K^2=\dfrac{180\times(45\times30-60\times45)^2}{90\times90\times105\times75}=\dfrac{36}{7}\approx5.143<6.635$， ……3 分

所以没有 99%的把握认为学生每周平均运动时长与性别有差异. ……4 分

（2）男生中每周平均运动时长不少于 7 小时的比率为 $p_1=\dfrac{45}{90}=\dfrac{1}{2}$，女生中每周平均运动时长不少于 7 小时的比率为 $p_2=\dfrac{30}{90}=\dfrac{1}{3}$，则 $X\sim B(2,\dfrac{1}{2})$，$Y\sim B(2,\dfrac{1}{3})$，

所以 $E(X)=2\times\dfrac{1}{2}=1$，$E(Y)=2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$， ……5 分

根据题意可知 $Z=-2,-1,0,1,2$，

$P(Z=-2)=P(X=0)P(Y=2)=(\dfrac{1}{2})^2\times(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{1}{36}$， ……6 分

$P(Z=-1)=P(X=0)P(Y=1)+P(X=1)P(Y=2)=(\dfrac{1}{2})^2\times\mathrm{C}_2^1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}+\mathrm{C}_2^1\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{1}{6}$，

……7 分

$$P(Z=0)=P(X=0)P(Y=0)+P(X=1)P(Y=1)+P(X=2)P(X=2)$$
$$=(\dfrac{1}{2})^2\times(\dfrac{2}{3})^2+\mathrm{C}_2^1\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\mathrm{C}_2^2\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}+(\dfrac{1}{2})^2\times(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{13}{36}，$$

$P(Z=1)=P(X=1)P(Y=0)+P(X=2)P(Y=1)=\mathrm{C}_2^1\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{2}{3})^2+(\dfrac{1}{2})^2\times\mathrm{C}_2^1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$，

……8 分

$P(Z=2)=P(X=2)P(Y=0)=(\dfrac{1}{2})^2\times(\dfrac{2}{3})^2=\dfrac{1}{9}$， ……9 分

所以 $E(Z)=(-2)\times\dfrac{1}{36}+(-1)\times\dfrac{1}{6}+0\times\dfrac{13}{36}+1\times\dfrac{1}{3}+2\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{3}$， ……11 分

所以 $E(Z)=E(X)-E(Y)$. ……12 分

20.（12 分）

【解析】（1）**方法 1：** 连接 B_1C，延长 B_1D，BA 交于点 E，连接 CE，

则 $B_1C \perp BC_1$，$BC \perp CE$， ……2 分

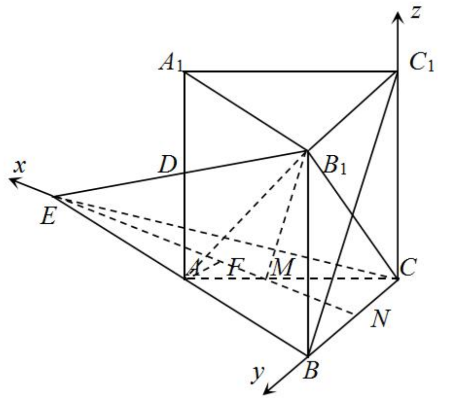
因为 $CC_1 \perp$ 平面 BCE，

所以 $CC_1 \perp CE$，$CE \perp$ 平面 BCC_1B_1， ……3 分

因为 $BC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以 $EC \perp BC_1$，$BC_1 \perp$ 平面 B_1CE， ……4 分

因为 $B_1D \subset$ 平面 B_1CE，



所以 $B_1D \perp BC_1$. ……5 分

方法 2： 由条件得 $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$，$\overrightarrow{AA_1}^2=\overrightarrow{AB}^2$，

……2 分

所以 $\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=(\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}^2-\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB})+$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}^2=0$， ……4 分

所以 $B_1D \perp BC_1$. ……5 分

方法 3： 连接 B_1C，延长 B_1D，BA 交于点 E，连接 CE，以 C 为坐标原点，CE 为 x 轴，CB 为 y 轴，CC_1 为 z 轴建立如图示的空间直角坐标系 $C-xyz$，设 $|\overrightarrow{AB}|=2$，则 $D(\sqrt{3},1,1)$，

$B(0,2,0)$，$B_1(0,2,2)$，$C_1(0,0,2)$， ……2 分

所以 $\overrightarrow{DB_1}=(-\sqrt{3},1,1)$，$\overrightarrow{BC_1}=(0,-2,2)$， ……3 分

所以 $\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$，即 $B_1D \perp BC_1$. ……5 分

（2）在（1）的条件下，若 B_1，D，M，N 在同一平面上，则 E，M，N 在同一直线上，

……6 分

过 A 作 $AF \parallel BC$，交 EN 于 F，设 $BC=2$，$NC=k$，则 $AF=\frac{1}{2}BN=\frac{2-k}{2}$，

所以 $S_{\triangle ANC}=\frac{k}{2}S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle CMN}=\dfrac{k}{\frac{2-k}{2}+k}S_{\triangle ANC}$，

所以 $S_{\triangle CMN}=\frac{k^2}{2+k}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$，解得 $k=1$，则 $NC=1$，$CM=\frac{4}{3}$. ……8 分

以 C 为坐标原点，CE 为 x 轴，CB 为 y 轴，CC_1 为 z 轴建立坐标系，则 $A(\sqrt{3},1,0)$，

$M(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3},0)$，$N(0,1,0)$，$B_1(0,2,2)$，

所以 $\overrightarrow{MA}=(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{3},0)$，$\overrightarrow{MB_1}=(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{4}{3},2)$，$\overrightarrow{MN}=(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{1}{3},0)$， ……9 分

设平面 AMB_1 与平面 B_1MN 的法向量分别为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{3}x_1+\frac{1}{3}y_1=0\\-\frac{2\sqrt{3}}{3}x_1+\frac{4}{3}y_1+2z_1=0\end{cases},\quad\begin{cases}-\frac{2\sqrt{3}}{3}x_2+\frac{1}{3}y_2=0\\-\frac{2\sqrt{3}}{3}x_2+\frac{4}{3}y_2+2z_2=0\end{cases},$$

不妨取 $x_1=1$，$x_2=1$，则 $\boldsymbol{m}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$，$\boldsymbol{n}=(1,2\sqrt{3},-\sqrt{3})$， ……10 分

所以 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1\times1-\sqrt{3}\times2\sqrt{3}-\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{1+3+3}\times\sqrt{1+12+3}}=-\frac{2\sqrt{7}}{7}$，

故二面角 $A-B_1M-N$ 的正弦值为 $\sqrt{1-(-\frac{2\sqrt{7}}{7})^2}=\frac{\sqrt{21}}{7}$. ……12 分

21.（12 分）

【解析】（1）根据题意有，$B(0,1)$，设 $F(c,0)$，则 $\overrightarrow{FB}=(-c,1)$，$\overrightarrow{FP}=(2-c,1)$， …1 分

当 $PF\perp BF$ 时，$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FB}=-c(2-c)+1=0$， ……2 分

所以 $c=1$， ……3 分

根据椭圆的几何性质可知 $a^2=1+c^2=2$，

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ……4 分

（2）设 MN 的方程为 $y=k(x-2)+1$，代入 C 的方程有：

$(2k^2+1)x^2+4k(1-2k)x+2(2k-1)^2-2=0$， ……5 分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{4k(2k-1)}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2(2k-1)^2-2}{2k^2+1}=\frac{8k(k-1)}{2k^2+1}$， ……6 分

直线 MF 的方程为 $y_1x+(1-x_1)y-y_1=0$，直线 NF 的方程为 $y_2x+(1-x_2)y-y_2=0$，

所以点 B 到直线 MF，NF 的距离分别为 $d_1=\frac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}}$，$d_2=\frac{|x_2+y_2-1|}{\sqrt{(x_2-1)^2+y_2^2}}$，若直线 BF 平分 $\angle MFN$，只需满足 $d_1=d_2$， ……8 分

即 $[(x_1-1)+y_1]^2[(x_2-1)^2+y_2^2]=[(x_2-1)+y_2]^2[(x_1-1)^2+y_1^2]$，

整理化简有 $(x_1-1)(x_2-1)^2y_1+(x_1-1)y_1y_2^2=(x_2-1)(x_1-1)^2y_2+(x_2-1)y_2y_1^2$，

即 $(x_1-1)(x_2-1)[(x_2-1)y_1-(x_1-1)y_2]=y_1y_2[(x_2-1)y_1-(x_1-1)y_2]$，

故只需满足 $(x_1-1)(x_2-1)=y_1y_2$， ……10 分

其中 $(x_1-1)(x_2-1)=x_1x_2-(x_1+x_2)+1=\dfrac{8k(k-1)}{2k^2+1}-\dfrac{4k(2k-1)}{2k^2+1}+1=\dfrac{2k^2-4k+1}{2k^2+1}$， ……11 分

$y_1y_2=(kx_1+1-2k)(kx_2+1-2k)=k^2x_1x_2+k(1-2k)(x_1+x_2)+(1-2k)^2=\dfrac{2k^2-4k+1}{2k^2+1}$，

故 $(x_1-1)(x_2-1)=y_1y_2$，$d_1=d_2$，直线 BF 平分 $\angle MFN$． ……12 分

22．（12 分）

【解析】（1）**方法 1：**根据题意有 $\dfrac{2x}{x+1}\geqslant 0$，则 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$， ……1 分

当 $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ 时， $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}\sqrt{\dfrac{x+1}{2x}}>0$， ……2 分

所以 $f(x)$ 有两个单调递增区间，分别是 $(-\infty,-1)$， $(0,+\infty)$． ……3 分

方法 2：根据题意有 $\dfrac{2x}{x+1}\geqslant 0$，则 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$， ……1 分

$f(x)=\sqrt{2-\dfrac{2}{x+1}}$，且 $y=2-\dfrac{2}{x+1}$ 在 $(-\infty,-1)$， $(-1,+\infty)$ 单调递增， $y=\sqrt{x}$ 为增函数，…2 分

所以 $f(x)$ 有两个单调递增区间，分别是 $(-\infty,-1)$， $(0,+\infty)$． ……3 分

（2）因为 $g(x)$ 是偶函数，故 $-\dfrac{1}{4}<g(x)<1$ 等价于当 $x>0$ 时， $-\dfrac{x}{4}<\sin x<x$，

设 $h(x)=\sin x-x$，则 $h'(x)=\cos x-1\leqslant 0$， $h(x)$ 单调递减， ……4 分

所以当 $x>0$ 时， $h(x)<h(0)=0$，即当 $x>0$ 时， $\sin x<x$． ……5 分

设 $\varphi(x)=\sin x+\dfrac{x}{4}$，当 $0<x\leqslant\pi$ 时， $\varphi(x)>0$，

当 $x\geqslant\dfrac{3\pi}{2}$ 时，$\varphi(x)\geqslant\sin x+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3\pi}{2}>\sin x+1\geqslant 0$， ……6 分

当 $\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}$ 时， $\varphi'(x)=\cos x+\dfrac{1}{4}$ 是增函数，且 $\varphi'(\dfrac{4\pi}{3})=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}<0$， $\varphi'(\dfrac{3\pi}{2})=\dfrac{1}{4}>0$，

所以存在唯一 $x_0\in(\dfrac{4\pi}{3},\dfrac{3\pi}{2})$，使得 $\varphi'(x_0)=\cos x_0+\dfrac{1}{4}=0$，即 $\cos x_0=-\dfrac{1}{4}$，

当 $\pi<x<x_0$ 时， $\varphi'(x)<0$， $\varphi(x)$ 单调递减，当 $x_0<x<\dfrac{3\pi}{2}$ 时， $\varphi'(x)>0$， $\varphi(x)$ 单调递增，

故 $\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0) = \sin x_0 + \dfrac{x_0}{4} = -\sqrt{1-\cos^2 x_0} + \dfrac{x_0}{4} > \dfrac{1}{4} \times \dfrac{4\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{15}}{4} > 0$.

综上，$-\dfrac{1}{4} < g(x) < 1$. ……8 分

（3）由 $x_1 = \sqrt{2}$，$x_{n+1} = f(x_n) = \sqrt{\dfrac{2x_n}{x_n+1}}$ 易知 $x_n > 0$，

故 $\dfrac{1}{x_{n+1}^2} = \dfrac{x_n+1}{2x_n} = \dfrac{1}{2x_n} + \dfrac{1}{2}$，即 $2(\dfrac{1}{x_{n+1}})^2 = \dfrac{1}{x_n} + 1$，其中 $\dfrac{1}{x_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{4}$， ……9 分

又因为 $2\cos^2\dfrac{\pi}{2^{n+2}} = \cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}} + 1$，且由（1）可知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

所以当且仅当 $\dfrac{1}{x_n} = \cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ 时，即 $x_n = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}$ 时，$x_{n+1} = f(x_n)$ 成立， ……10 分

所以 $x_1x_2\cdots x_n = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2^2}\cdot\cos\dfrac{\pi}{2^3}\cdots\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}} = \dfrac{2^n\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{2^n\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\cdots\cos\dfrac{\pi}{2^2}}$

$= \dfrac{2^n\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\dfrac{\pi}{2}} = 2^n\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$. ……11 分

由（2）可知，当 $x > 0$ 时，$\sin x < x$，故 $\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}} < \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$，

所以 $x_1x_2\cdots x_n = 2^n\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}} < 2^n \times \dfrac{\pi}{2^{n+1}} = \dfrac{\pi}{2}$. ……12 分