景德镇市2023届高三第三次质检试题

数 学（文科）

命题 景德镇一中 江宁 黄卓颖 景德镇二中 余敏 乐平中学 徐新新

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，满分150分，考试时间120分钟.

第Ⅰ卷（选择题）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $A=\{y\mid y=\sin x\}$，$B=\{y\mid y=\sqrt{-x^2+4x-3}\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $(1,+\infty)$　　B. $\varnothing$　　C. $[0,1]$　　D. $(1,3]$

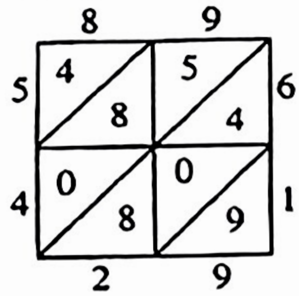
2．若向量 $\vec{a}=(2,-1)$ 与向量 $\vec{b}=(1,3)$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=$（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3．满足函数 $f(x)=\ln(mx+3)$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递减的充要条件是（　　）

A. $-4<m<-2$　　B. $-3<m<-1$　　C. $-4<m<0$　　D. $-3<m<0$

4．写算，是一种格子乘法，也是笔算乘法的一种，用以区别筹算与珠算，它由明代数学家吴敬在其撰写的《九章算法比类大全》一书中提出，是从天元式的乘法演变而来.例如计算 89×61，将被乘数89计入上行，乘数61计入右行，然后以乘数61的每位数字乘被乘数89的每位数字，将结果计入相应的格子中，最后从右下方开始按斜行加起来，满十向上斜行进一，如图，即得5429.，若从表内的8个数字(含相同的数字，表周边数据不算在内）中取1个数字，这个数字大于5的概率为(　　)



A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{3}{8}$

C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{5}{8}$

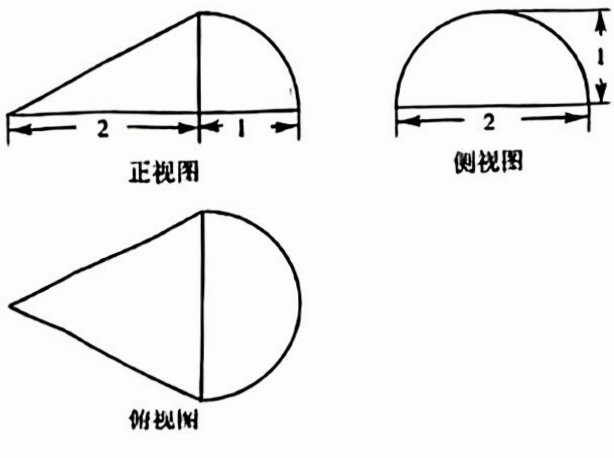
5．一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为（　　）.

A. $\dfrac{2\pi}{3}$

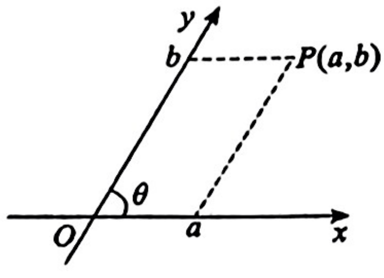
B. π

C. $\dfrac{4\pi}{3}$

D. $\dfrac{5\pi}{3}$



6. 互相垂直且有公共原点的两条数轴构成平面直角坐标系，但如果平面坐标系中两条坐标轴不垂直，则这样的坐标系称为“斜坐标系”.如图，在斜坐标系中，过点P作两坐标轴的平行线，其在x轴和y轴上的截距a、b分别作为点P的x坐标和y坐标，记$P(a,b)$.若斜坐标系中，x轴正方向和y轴正方向的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则该坐标系中$M(2,2)$和$N(4,1)$两点间的距离为（　）



A. 2　　　B. 1　　　C. $\sqrt{5}$　　　D. $\sqrt{3}$

7. 首钢滑雪大跳台是冬奥史上第一座与工业旧址结合再利用的竞赛场馆，它的设计创造性地融入了敦煌壁画中飞天的元素，建筑外形优美流畅，飘逸灵动，被形象地称为雪飞天．中国选手谷爱凌和苏翊鸣分别在此摘得女子自由式滑雪大跳台和男子单板滑雪大跳台比赛的金牌．雪飞天的助滑道可以看成一个线段PQ和一段圆弧$\overset{\frown}{QM}$组成，如图所示.在适当的坐标系下圆弧$\overset{\frown}{QM}$所在圆的方程为$(x+10)^2+(y-3)^2=128$，若某运动员在起跳点M以倾斜角为$45°$且与圆C相切的直线方向起跳，起跳后的飞行轨迹是一个对称轴在y轴上的抛物线的一部分，如下图所示，则该抛物线的轨迹方程为（　）

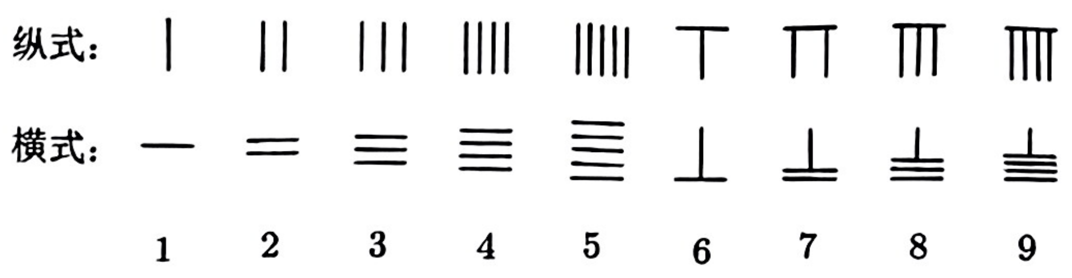
A. $x^2=-4(y+4)$　　　B. $y=-\frac{1}{2}x^2-3$

C. $x^2=-32(y-1)$　　　D. $y^2=-\frac{1}{4}(x+4)$

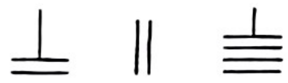
8. 在数列$\{a_n\}$中，$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+1}+\cdots+\frac{n}{n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$，$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，则数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_{10}=$（　）

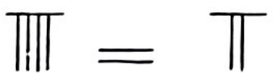
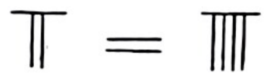
A. $\frac{10}{11}$　　　B. $\frac{20}{11}$　　　C. $\frac{30}{11}$　　　D. $\frac{40}{11}$

9. 中国古代十进位制的算筹记数法在世界数学史上是一个伟大的创造．据史料推测，算筹最晚出现在春秋晚期战国初年，算筹记数的方法是：个位、百位、万位…的数按纵式的数码摆出；十位、千位、十万位…的数按横式的数码摆出．如7738可用算筹表示为$\perp\ \Pi\ \equiv\ \text{Ⅲ}$.

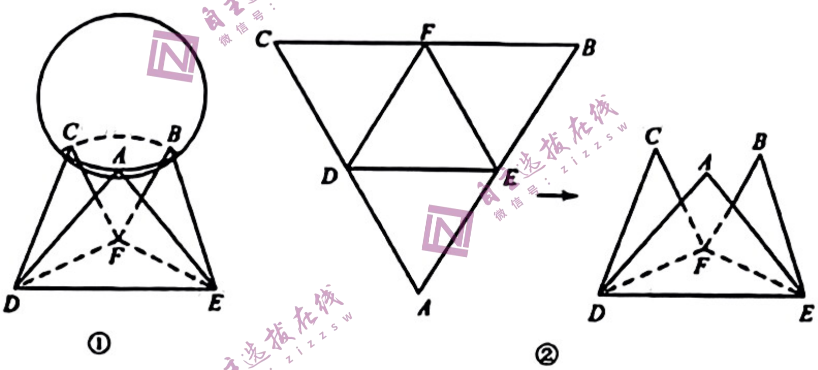


1-9 这 9 个数字的纵式与横式的表示数码如上图所示，则 $3^{\log_2 32}$ 的运算结果可用算筹表示（　）

A. 　　B. 

C. 　　D. 

10．某地举办数学建模大赛，本次大赛的冠军奖杯由一个铜球和一个托盘组成，如图①，已知球的表面积为 $\frac{32\pi}{3}$，托盘由边长为 8 的等边三角形铜片沿各边中点的连线垂直向上折叠形成，即面 ADE,面 CDF,面 BEF 都与面 DFE 垂直，如图②，则经过三个顶点 A，B，C 的球的截面圆的面积为（　）



A．π　　B．$\frac{4\pi}{3}$　　C．$\frac{5\pi}{3}$　　D．2π

11．已知 F_1，F_2 分别是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，直线 l 经过 F_1 且与 C 左支交于 P，Q 两点，P 在以 F_1F_2 为直径的圆上，$|PQ|:|PF_2|=3:4$，则 C 的离心率是（　）

A．$\frac{\sqrt{15}}{3}$　　B．$\frac{2\sqrt{15}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{17}}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{17}}{3}$

12．已知定义域为 R 的函数 $f(x)$ 的图象是连续不断的曲线，且 $f(2-x)=f(x)e^{2-2x}$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>f(x)$，则下列判断正确的是（　）

A．$f(1)>ef(0)$　B．$f(3)<e^4f(-1)$　C．$f(2)<e^3f(-1)$　D．$f(3)>e^5f(-2)$

第Ⅱ卷（非选择题）

本卷包括必考题和选考题两部分，第 13 题～第 21 题为必考题，每个试题考生必须做答，第 22 题～第 23 题为选考题，考生根据要求做答．

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．已知 $S_4=0$，$a_5=5$，则 a_n 为__________．

14. 已知 i 为虚数单位，且 $|z-2i|=1$，则 $|z|$ 的最大值是__________．

15. 已知直线 $x=a$ （$0<a<\dfrac{\pi}{2}$）与函数 $f(x)=\sin x$ 和函数 $g(x)=\cos x$ 的图象分别交于 P,Q 两点，若 $|PQ|=\dfrac{1}{4}$，则线段 PQ 中点的纵坐标为__________．

16. 若曲线 $y=\ln x$ 在点 $P(x_1,y_1)$ 处的切线与曲线 $y=e^x$ 相切于点 $Q(x_2,y_2)$，则 $\dfrac{2}{x_1-1}+x_2=$__________．

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17～21 题为必做题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选做题，考生根据要求作答．

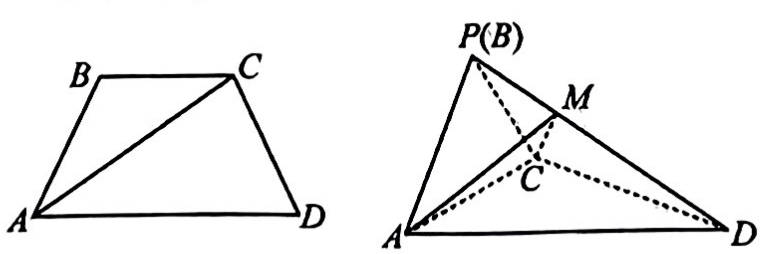
（一）必考题：共 60 分．

17. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c．已知 $\tan B+\tan C=\dfrac{2\sin A}{\cos C}$．

（1）求角 B；

（2）若 $\triangle ABC$ 是钝角三角形，且 $a=c+2$，求边 c 的取值范围．

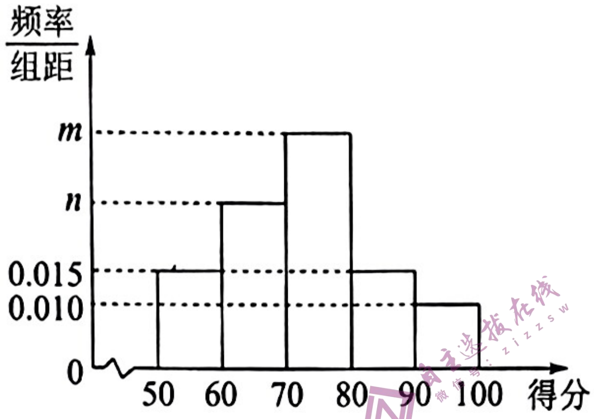
18 如图，等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD\,/\!/\,BC$，$AB=BC=CD=\dfrac{1}{2}AD=2$，现以 AC 为折痕把 $\triangle ABC$ 折起，使点 B 到达点 P 的位置，且 $PA\perp CD$．



（1）证明：面 $PAC\perp$ 面 ACD；

（2）若 M 为 PD 的中点，求点 P 到平面 ACM 的距离．

19.部分高校开展基础学科招生改革试点工作（强基计划）的校考由试点高校自主命题，校考过程中达到笔试优秀才能进入面试环节．已知今年全国共有600名理科学生参加某高校的笔试测试，其得分都在$[50,100]$内，得分情况绘制成频率分布直方图如下， 在区间$[70,80),[60,70),[80,90)$的频率依次构成等差数列．若规定得分不低于80分者为优秀，文科有400名学生参与测试，其中得分优秀的学生有50名．



（1）若以每组数据的中间值代替本组数据，求理科学生得分的平均值；

（2）请根据所给数据完成下面的列联表，并说明是否有99.9%以上的把握认为，得分是否优秀与文理科有关?

	优秀	不优秀	合计
理科生			
文科生			
合计			1000

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$

$P(K^2\geq k_0)$	0.050	0.010	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

20.设椭圆 C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A、B，且焦距为 2.点 P 在椭圆上且异于 A、B 两点.若直线 PA 与 PB 的斜率之积为 $-\dfrac{3}{4}$，

（1）求椭圆 C 的标准方程.

（2）过点 $F\left(-1,0\right)$ 作不与 x 轴重合的直线与椭圆 C 相交于 M、N 两点，直线 m 的方程为：$x=-2a$，过点 M 作 ME 垂直于直线 m，交 m 于点 E. 判断直线 EN 是否过定点，并说明理由.

21. 函数 $f(x)=\ln x+x-a+\dfrac{b}{x}$，对任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)\geq 0$ 恒成立，

（1）当 $a=3$ 时，求 b 的取值范围；

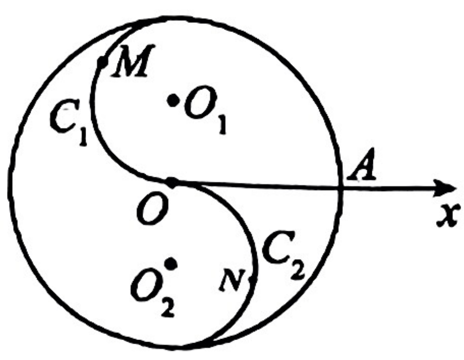
（2）当 $a>0$ 时，若所有满足题意的 a，b 都有 $\dfrac{a}{b+1}\leq M$ 恒成立，求 M 的最小值.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题做答．如果多做，则按所做的第一题记分．

22．如图，在极坐标系 Ox 中，圆 O 的半径为 2，半径均为 1 的两个半圆弧 C_1,C_2 所在圆的圆心分别为 $O_1(1,\dfrac{\pi}{2}),O_2(1,\dfrac{3\pi}{2})$，$M$ 是半圆弧 C_1 上的一个动点，N 是半圆弧 C_2 上的一个动点.

（1）若 $\angle O_2ON=\dfrac{\pi}{3}$，求点 N 的极坐标；

（2）若点 K 是射线 $\theta=\dfrac{\pi}{3},(\rho\geq 0)$ 与圆 O 的交点，求 $\triangle MOK$ 面积的取值范围.



23. 设 a,b,c 均为正数，且 $4a^2+b^2+16c^2=1$.

证明：（1）$0<ab<\dfrac{1}{4}$；

（2）$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{4abc^2}>49$.