长沙市一中2023届模拟试卷(二)

数 学

时量:120分钟　　满分:150分

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题(本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.)

1. 已知全集$U=\mathbf{R}$,集合$A=\{x|x^2-2x-3>0\}$,$B=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$,则$(\complement_U A)\cap B=$

A. $\{2\}$　　B. $\{0,2\}$　　C. $\{0,2,4\}$　　D. $\{-1,0,1,2,3\}$

2. 设函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$,将函数$f(x)$的图象先向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度,再将横坐标伸长到原来的2倍,纵坐标不变,所得的图象与$y=\cos x$图象重合,则

A. $\omega=\frac{1}{2},\varphi=\frac{\pi}{6}$　　B. $\omega=\frac{1}{2},\varphi=\frac{\pi}{3}$

C. $\omega=2,\varphi=\frac{5\pi}{6}$　　D. $\omega=2,\varphi=\frac{\pi}{3}$

3. 点P在单位圆上运动,则P点到直线$l:(1+3\lambda)x+(1-2\lambda)y-(7+\lambda)=0$($\lambda$为任意实数)的距离的最大值为

A. $2\sqrt{3}+1$　　B. 6　　C. $3\sqrt{2}+1$　　D. 5

4. 下列不是$x^3=1$的复数范围内解的是

A. 1　　B. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

C. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　D. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

5. 已知向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为30°,且$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$,$|\boldsymbol{b}|=1$,设$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,则向量$\boldsymbol{m}$在$\boldsymbol{n}$方向上的投影向量为

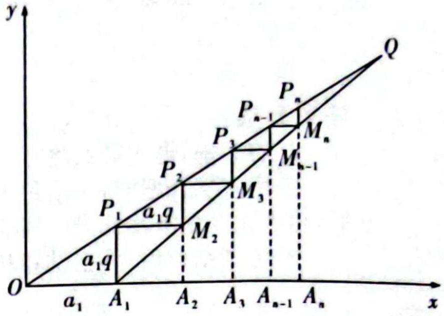
A. $2\boldsymbol{n}$　　B. $\boldsymbol{n}$　　C. $\sqrt{3}\boldsymbol{n}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{n}$

6. 1360年詹希元创制了"五轮沙漏",流沙从漏斗形的沙池流到初轮边上的沙斗里,驱动初轮,从而带动各级机械齿轮旋转.最后一级齿轮带动在水平面上旋转的中轮,中轮的轴心上有一根指针,指针则在一个有刻线的仪器圆盘上转动,以此显示时刻,这种显示方法几乎与现代时钟的表面结构完全相同.已知一个沙漏的沙池形状为圆锥

形，满沙池的沙漏完正好一小时（假设沙匀速漏下），当沙池中沙的高度漏至一半时，记时时间为

A. $\frac{1}{2}$小时　　B. $\frac{2}{3}$小时　　C. $\frac{3}{4}$小时　　D. $\frac{7}{8}$小时

7. 等比数列的历史由来已久，我国古代数学文献《孙子算经》、《九章算术》、《算法统宗》中都有相关问题的记载. 现在我们不仅可以通过代数计算来研究等比数列，还可以构造出等比数列的图象，从图形的角度更为直观的认识它. 以前 n 项和为 S_n，且 $a_1>0,0<q<1$ 的等比数列$\{a_n\}$为例，先画出直线 OQ：$y=qx$，并确定 x 轴上一点 $A_1(a_1,0)$，过点 A_1 作 y 轴的平行线，交直线 OQ 于点 P_1，则 $A_1P_1=a_1q$. 再过点 P_1 作平行于 x 轴，长度等于 a_1q 的线段 P_1M_2，……，不断重复上述步骤，可以得到点列$\{P_n\}$，$\{M_n\}$和$\{A_n\}$. 下列说法错误的是



A. $|A_2A_3|=a_1q^2$　　B. $\frac{P_nA_n}{OA_n}=q$

C. 点 A_n 的坐标为$(S_n,0)$　　D. $P_nA_n=S_n-a_1$

8. 已知 A,B,C,D 是体积为$\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$的球体表面上四点，若 $AB=4,AC=2,BC=2\sqrt{3}$，且三棱锥 $A-BCD$的体积为 $2\sqrt{3}$，则线段 CD 长度的最大值为

A. $2\sqrt{3}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{13}$　　D. $2\sqrt{5}$

二、多项选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.）

9. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$满足 $f(x-2)=-f(x)$，且 $f(x)$在$[0,1]$上是增函数，则

A. $f(x)$关于 $x=-1$ 对称　　B. $f(x+4)=f(x)$

C. $f\left(-\frac{1}{2}\right)>f\left(\frac{15}{4}\right)$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{2023}f(n)=0$

10. 如图 1，某广场上放置了一些石凳供大家休息，这些石凳是由正方体截去八个一样的正三棱锥得到的，它的所有边长均相同，数学上我们称之为半正多面体(semiregular solid)，亦称为阿基米德多面体，如图 2，设 $AB=1$，则下列说法正确的是

图1

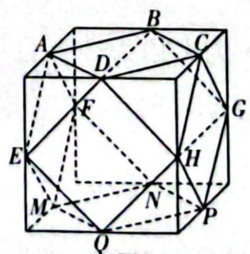


图2

A. 该多面体的表面积为 $6+2\sqrt{3}$

B. 该多面体的体积为$\frac{5\sqrt{2}}{3}$

C. 该多面体的平行平面间的距离均为$\sqrt{2}$

D. 过 A、Q、G 三点的平面截该多面体所得的截面面积为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

11. 在一个抽奖游戏中，主持人从编号为 1,2,3,4 的四个外观相同的空箱子中随机选择一个，放入一件奖品，再将四个箱子关闭，也就是主持人知道奖品在哪个箱子里，当抽奖人选择了某个箱子后，在箱子打开之前，主持人先随机打开了另一个没有奖品的箱子，并问抽奖人是否愿意更改选择以便增加中奖概率. 现在已知甲选择了 1 号箱，在箱子打开之前，主持人先打开了 3 号箱. 用 A_i 表示 i 号箱有奖品($i=1,2,3,4$)，用 B_i 表示主持人打开 i 号箱子($i=2,3,4$)，下列结论正确的是

A. $P(A_1)=\frac{1}{4}$

B. $P(B_3|A_2)=\frac{1}{2}$

C. 要使获奖概率更大，甲应该坚持选择 1 号箱

D. 要使获奖概率更大，甲应该改选 2 号或者 4 号箱

12. 抛物线有如下光学性质：由其焦点射出的光线经过抛物线反射后，沿平行于抛物线对称轴的方向射出；反之，平行于抛物线对称轴的入射光线经抛物线反射后必过抛物线的焦点. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，O 为坐标原点，一束平行于 x 轴的光线 l_1 从点 $P(m,n)(n^2<4m)$ 射入，经过抛物线上的点 $A(x_1,y_1)$ 反射后，再经抛物线上另一点 $B(x_2,y_2)$ 反射后，沿直线 l_2 射出，则下列结论中正确的是

A. $x_1x_2=1$

B. 点 $A(x_1,y_1)$ 关于 x 轴的对称点在直线 l_2 上

C. 直线 l_2 与直线 $x=-1$ 相交于点 D，则 A,O,D 三点共线

D. 直线 l_1 与 l_2 间的距离最小值为 4

三、填空题(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.)

13. 已知$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则 $a_4=$ ________.

14. 设 P 是双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 右支上的一个动点，F_1、F_2 为左、右两个焦点，在$\triangle PF_1F_2$ 中，令$\angle PF_1F_2=\alpha$，$\angle PF_2F_1=\beta$，则 $\tan\frac{\alpha}{2}:\tan\frac{\beta}{2}$的值为________.

15. 一个篮球运动员投篮一次得 3 分的概率为 a，得 2 分的概率为 b，不得分的概率为 c，$a,b,c\in(0,1)$，已知他投篮一次得分的数学期望为 2，则$\frac{2}{a}+\frac{1}{3b}$的最小值为________.

16. 已知 $a\neq0$，函数 $f(x)=ae^x$，$g(x)=a\ln x+b$，若存在一条直线与曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 均相切，则使不等式$\frac{b}{a}<m$ 恒成立的最小整数 m 的值是________.

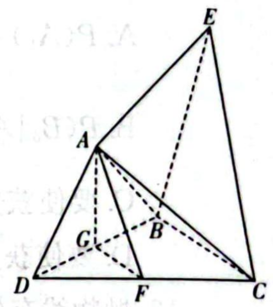
四、解答题(本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 10 分)已知在$\triangle ABC$中，$a=2b$，且$S_{\triangle ABC}=12$.

(1)若$b=4$，求$\tan(A+B)$；

(2)若$C<\frac{\pi}{2}$且$\sin C=\frac{3}{5}$，求$\sin A,\sin B$.

18. (本小题满分 12 分)如图所示的在多面体中，$AB=AD$，$EB=EC$，平面$ABD\perp$平面BCD，平面$BCE\perp$平面BCD，点F,G分别是CD,BD中点.



(1)证明：平面AFG//平面BCE；

(2)若$BC\perp BD$，$BC=BD=2$，$AB=\sqrt{2}$，$BE=\sqrt{5}$，求平面AFG和平面ACE夹角的余弦值.

19. (本小题满分 12 分)已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n(S_n\neq 0)$，数列$\{S_n\}$的前n项积为T_n，且满足$S_n+T_n=S_n\cdot T_n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求证：$\left\{\frac{1}{S_n-1}\right\}$为等差数列；

(2)记$b_n=\frac{1}{n^2S_n}$，求数列$\{b_n\}$的前 2023 项的和M.

20. (本小题满分 12 分)某学校研究性学习小组在学习生物遗传学的过程中，为验证高尔顿提出的关于儿子成年后身高y(单位:cm)与父亲身高x(单位:cm)之间的关系及存在的遗传规律，随机抽取了 5 对父子的身高数据，如下表：

父亲身高x	160	170	175	185	190
儿子身高y	170	174	175	180	186

(1)根据表中数据，求出y关于x的线性回归方程，并利用回归直线方程分别确定儿子比父亲

高和儿子比父亲矮的条件，由此可得到怎样的遗传规律？

记 $\hat{e}_i=y_i-\hat{y}_i=y_i-\hat{b}x_i-\hat{a}(i=1,2,\cdots,n)$，其中 y_i 为观测值，$\hat{y}_i$ 为预测值，$\hat{e}_i$ 为对应 (x_i, y_i) 的残差. 求(1)中儿子身高的残差的和，并探究这个结果是否对任意具有线性相关关系的两个变量都成立？若成立加以证明；若不成立说明理由.

参考数据及公式：$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i=880$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=155450$，$\sum\limits_{i=1}^{5}y_i=885$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=156045$，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\cdot\overline{x}$.

本小题满分 12 分)已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $D(0,-1)$，且有两个顶点所在直线的斜率为 $\dfrac{1}{2}$，过椭圆左顶点 A 的直线 l 与椭圆 C 交于点 M，与 y 轴交于点 N.

(1)若 $\triangle AMD$ 的面积为 $\dfrac{6}{5}$，求直线 l 的方程；

(2)设过原点 O 且与直线 l 平行的直线 l' 交椭圆于点 P，求证：$\dfrac{|AM|\cdot|AN|}{|OP|^2}$ 为定值.

本小题满分 12 分)已知函数 $f(x)=e^{x-1}g(x)-\ln x$.

(1)若函数 $g(x)=\left(\dfrac{1}{2}x^2+ax+a\ln x\right)e^{1-x}$，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)从下面①②两个问题中任意选择一个证明，若两个都证明，则按第一个证明计分.

①若函数 $g(x)=(x+1)e^{1-x}\ln x$，$f(m)=f(n)$，且 $m\neq n$，证明：$m+n<1$；

②若函数 $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2e^{1-x}\left(x^2-x\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$，证明：$f(x)>\dfrac{1+\ln 2}{2}$.