# 高二期末联考

## 数学参考答案

一、选择题

1. A 【解析】由题意可得，$A=\{x\mid x^2-2x-3\leqslant 0,x\in\mathbf{Z}\}=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3,x\in\mathbf{Z}\}=\{-1,0,1,2,3\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right\}=\{x\mid 4-x^2>0\}=\{x\mid -2<x<2\}$，所以 $A\cap B=\{-1,0,1\}$，所以 $A\cap B$ 真子集的个数为 7. 故选 A.

2. C 【解析】因为 $e^{\frac{\pi}{2}i}=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}=i$，又 $(e^{\frac{\pi}{4}i})^{2024}=\left(\dfrac{\sqrt2}{2}+\dfrac{\sqrt2}{2}i\right)^{2024}=\left[\left(\dfrac{\sqrt2}{2}+\dfrac{\sqrt2}{2}i\right)^2\right]^{1012}=i^{1012}=1$，所以 $(e^{\frac{\pi}{4}i})^{2024}+e^{\frac{\pi}{2}i}=1+i$. 故选 C.

3. B 【解析】因为 $\alpha\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha-\dfrac{\pi}{4}\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right)$，又 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=m(m>0)$，所以 $\alpha-\dfrac{\pi}{4}\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$，从而 $\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}$. 故选 B.

4. D 【解析】由 $|\boldsymbol a+\boldsymbol b|=|\boldsymbol a-2\boldsymbol b|$，可得 $|\boldsymbol a+\boldsymbol b|^2=|\boldsymbol a-2\boldsymbol b|^2$，即 $\boldsymbol a^2+2\boldsymbol a\cdot\boldsymbol b+\boldsymbol b^2=\boldsymbol a^2-4\boldsymbol a\cdot\boldsymbol b+4\boldsymbol b^2$，化简得 $2\boldsymbol a\cdot\boldsymbol b=\boldsymbol b^2$，所以 $2|\boldsymbol a|\cdot|\boldsymbol b|\cos\langle\boldsymbol a,\boldsymbol b\rangle=|\boldsymbol b|^2$，即 $|\boldsymbol a|\cos\langle\boldsymbol a,\boldsymbol b\rangle=\dfrac12$. 故选 D.

5. A 【解析】由于乙不能去 $A$ 景点，则乙可以去 $B$ 或 $C$ 景点，共 2 种，剩余的 3 人可以分成 1，2 两组或 1，1，1 三组两种情况，①分成 1，2 两组，和乙去不同的两个景点，有 $C_3^1C_2^2\cdot A_2^2=6$ 种，②分成 1，1，1 三组，去三个景点且甲和乙不能同去一个景点，有 $C_2^1\cdot A_2^2=4$ 种，所以不同的安排方法数为 $2\times(6+4)=20$ 种. 故选 A.

6. D 【解析】圆 $O:x^2+y^2=1$ 的圆心 $O$ 的坐标为 $(0,0)$，半径为 1，当 $\angle APB$ 最大时，$OP$ 垂直直线 $l$，此时 $|OP|=2$，$|PA|=|PB|=2$，从而四边形 $OAPB$ 的面积为 $S_{OAPB}=2\times\dfrac12\times\sqrt3\times1=\sqrt3$，设 $\angle AOP=\theta$，则 $\angle AOB=2\theta$，$S_{扇形OAB}=\dfrac12\times1^2\times2\theta=\theta$，从而劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 及 $PA,PB$ 所围成的平面图形的面积为 $S=\sqrt3-\theta$，又因为 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt3}{2}$，$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，从而 $0<S=\sqrt3-\theta=\sqrt3-\dfrac{\pi}{3}<1$. 故选 D.

7. B 【解析】由题意，数列 1，1，3，27，729，…为 $\{a_n\}$，且为一阶等比数列，设 $b_{n-1}=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$，所以 $\{b_n\}$ 为等比数列，其中 $b_1=1$，$b_2=3$，公比为 $q=\dfrac{b_2}{b_1}=3$，所以 $b_n=3^{n-1}$，则 $a_n=b_{n-1}\cdot b_{n-2}\cdots b_1\cdot a_1=3^{1+2+3+\cdots+(n-2)}=3^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$，$n\geqslant2$，所以 $\log_3a_n=\log_3 3^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}=\dfrac12(n^2-3n+2)$，$n\geqslant2$，因为 $a_1=1$，$a_2=1$，也适合上式，所以 $\log_3a_n=\dfrac12(n^2-3n+2)$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{10}\log_3a_n=\log_3a_1+\log_3a_2+\log_3a_3+\cdots+\log_3a_{10}=\dfrac12[(1^2+2^2+\cdots+10^2)-3(1+2+\cdots+10)+2\times10]=\dfrac12\left[\left(\dfrac16\times10\times11\times21\right)-3\times\dfrac{(1+10)\times10}{2}+2\times10\right]=120$. 故选 B.

8. B 【解析】构造函数 $g(x)=\sin x-\sqrt{1+2x}+1$，$x\in\left(0,\dfrac14\right)$，所以 $g'(x)=\cos x-\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$，$x\in$

$\left(0,\frac{1}{4}\right)$，令 $g'(x)=\cos x-\frac{1}{\sqrt{1+2x}}=f(x)$，$x\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$，则 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{(1+2x)^3}}-\sin x$，因为当 $x\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 时，$y=\frac{1}{\sqrt{(1+2x)^3}}$，$y=-\sin x$ 均单调递减，所以 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{(1+2x)^3}}-\sin x$ 单调递减，所以 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{(1+2x)^3}}-\sin x>f'\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^3}-\sin\frac{1}{4}$，因为 $\sin\frac{1}{4}<\frac{1}{4}$，所以 $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^3}-\sin\frac{1}{4}>\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^3}-\frac{1}{4}>0$，所以 $g'(x)=\cos x-\frac{1}{\sqrt{1+2x}}=f(x)$ 单调递增，又 $g'(0)=\cos 0-\frac{1}{\sqrt{1+0}}=0$，从而 $g(x)$ 在 $x\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 单调递增，所以 $g(x)>g(0)=0$，所以 $g(0.2)=\sin 0.2-\sqrt{1+2\times 0.2}+1>0$，从而得到 $b>a$. 又因为 $c-b=\ln 1.44-\sin 0.2=2\ln 1.2-\sin 0.2$，构造函数 $\varphi(x)=2\ln(1+x)-\sin x$，$x\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$，所以 $\varphi'(x)=\frac{2}{x+1}-\cos x$，$x\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$，令 $\varphi'(x)=\frac{2}{x+1}-\cos x=m(x)$，则 $m'(x)=\sin x-\frac{2}{(x+1)^2}$，因为当 $x\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 时，$y=\sin x$，$y=-\frac{2}{(x+1)^2}$ 均单调递增，所以 $m'(x)=\sin x-\frac{2}{(x+1)^2}$ 单调递增，所以 $m'(x)=\sin x-\frac{2}{(x+1)^2}<m'\left(\frac{1}{4}\right)=\sin\frac{1}{4}-\frac{2}{\left(\frac{1}{4}+1\right)^2}<\frac{1}{4}-\frac{2}{\left(\frac{1}{4}+1\right)^2}=\frac{1}{4}-\frac{32}{25}<0$，所以 $\varphi'(x)$ 在 $x\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 单调递减，所以 $\varphi'(x)>\varphi'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{8}{5}-\cos\frac{1}{4}>0$，所以 $\varphi(x)=2\ln(1+x)-\sin x$，$x\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 单调递增，从而 $\varphi(x)>\varphi(0)=0$，所以 $\varphi(0.2)=2\ln(1.2)-\sin 0.2>0$，即 $c>b$. 综上，有 $c>b>a$. 故选 B.

**二、选择题**

9. AB 【解析】因为 $a_{n+1}=a_n+1$，所以数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差为 1，因为 $a_1=-2$，所以 $a_n=-2+1\times(n-1)=n-3$，所以 $a_{2\,023}=2\,023-3=2\,020$，故 A 正确；因为 $a_{n+1}-a_n=1>0$，所以 $\{a_n\}$ 是递增数列，故 B 正确；因为 $a_1=-2<0$，$a_2=-1<0$，$a_3=0$，所以数列 $\{S_n\}$ 中的最小项为 $S_2$ 或 $S_3$，故 C 错误；当 $m=1$ 时，$S_1=-2$，$S_2=-3$，$S_3=-3$，显然不是等差数列，故 D 错误. 故选 AB.

10. ABD 【解析】因为 $f\left(-\frac{5\pi}{12}-x\right)=f\left(-\frac{5\pi}{12}+x\right)$，所以 $f(x)$ 的函数图象关于直线 $x=-\frac{5\pi}{12}$ 成轴对称，则 $-\frac{5\pi}{12}\omega+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $\omega=-\frac{2}{5}-\frac{12}{5}k$，$k\in\mathbf{Z}$，又因为 $1<\omega<3$，所以 $\omega=2$，故 A 正确；所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 B 正确；令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $-\frac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=0$ 时，$\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$ 为单调递增区间，但在区间 $\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$ 有增有减，故 C 错误；$f(2\,023\pi)=\sin\left(2\times 2\,023\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 D 正确. 故选 ABD.

11. BD 【解析】因为渐近线方程为 $3x\pm y=0$，所以可设双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 为 $E:x^2-\frac{y^2}{9}$

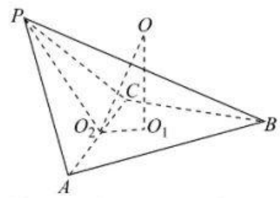
$=m$,又因为点 $R(4,6\sqrt{3})$ 在双曲线 $E$ 上,所以 $m=4$,从而双曲线 $E$:$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{36}=1$,所以离心率为 $e=\sqrt{10}$,故 A 错误;由题可知右焦点为 $F_2(2\sqrt{10},0)$,所以点 $F_2(2\sqrt{10},0)$ 到渐近线 $3x-y=0$ 的距离为 $d=\frac{|3\times2\sqrt{10}|}{\sqrt{9+1}}=6$,故 B 正确;若 $l\perp x$ 轴,则 $|AB|=2\times\frac{36}{2}=36>30$,所以与右支不可能有两个交点,若 $l$ 与 $x$ 轴不垂直,与 $C$ 的左、右支交于 $A,B$ 两点,因为 $|AB|=30>2a=4$,所以存在两条直线分别交左右两支各一点.综上可得:满足条件的直线有 2 条,故 C 错误;设 $M(x_1,y_1)$,$P(x_2,y_2)$,$Q(x_3,y_3)$,则 $x_3=\frac{x_1+x_2}{2}$,$y_3=\frac{y_1+y_2}{2}$,因为 $P,M$ 在双曲线 $E$ 上,所以 $\frac{x_1^2}{4}-\frac{y_1^2}{36}=1$ ①,$\frac{x_2^2}{4}-\frac{y_2^2}{36}=1$ ②,①－②并整理得 $\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=9$,因为 $k_{MP}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$,$k_{OQ}=\frac{y_3}{x_3}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$,所以,$k_{OQ}\times k_{PM}=9$,故 D 正确.故选 BD.

12. ABD 【解析】设实际比赛局数为 X,则 X 的可能取值为 3,4,5,所以 $P(X=3)=p^3+(1-p)^3$,$P(X=4)=C_3^1p^3(1-p)+C_3^1p(1-p)^3$,$P(X=5)=C_4^2p^2(1-p)^2$,因此打满五局的概率为 $C_4^2p^2(1-p)^2$,故 A 正确;故 $f(p)=3[p^3+(1-p)^3]+4[C_3^1p^3(1-p)+C_3^1p(1-p)^3]+5\times C_4^2p^2(1-p)^2=6p^4-12p^3+3p^2+3p+3$,常数项为 3,故 B 正确;由 $f'(p)=24p^3-36p^2+6p+3=3(2p-1)(4p^2-4p-1)$,∵$0\leqslant p\leqslant1$,所以 $4p^2-4p-1=(2p-1)^2-2<0$,∴令 $f'(p)>0$,则 $0\leqslant p<\frac{1}{2}$;令 $f'(p)<0$,则 $\frac{1}{2}<p\leqslant1$,则函数 $f(p)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right]$ 上单调递减,故 C 错误;又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=6\times\frac{1}{16}-12\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+3=\frac{33}{8}$,故 D 正确.故选 ABD.

**三、填空题**

13. 6.5 【解析】依题意这 10 个数据从小到大排列为 5、6、6、7、8、8、9、9、10、10,又 $10\times30\%=3$,所以这组数据的 30%分位数是第 3 与第 4 个数的平均数6.5.故答案为 6.5.

14. $\frac{52}{9}\pi$ 【解析】从第一步活动中可知$\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形,第二步活动中可知三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心是过底面$\triangle ABC$ 外心的平面 $ABC$ 的垂线,与过$\triangle PAC$ 外心的平面 $PAC$ 的垂线的交点,



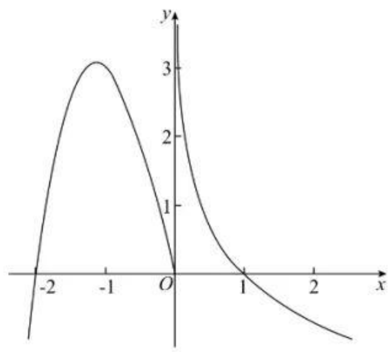

$\triangle ABC$ 的外心 $O_1$ 为$\triangle ABC$ 的中心,$\triangle PAC$ 的外心 $O_2$ 为 $AC$ 的中点,三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心为 $O$,则$\angle PO_2O_1=120°$,$O_1O_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\angle PO_2O=90°$,所以$\angle OO_2O_1=30°$,即 $\cos\angle OO_2O_1=\frac{O_2O_1}{OO_2}\Rightarrow\cos30°=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{OO_2}$,所以 $OO_2=\frac{2}{3}$,设外接球的半径为 $R$,所以 $R^2=OO_2^2+AO_2^2=\frac{4}{9}+1=\frac{13}{9}$,所以外接球的表面积为 $4\pi R^2=\frac{52\pi}{9}$.故答案为$\frac{52}{9}\pi$.

15. $\left[e+\frac{1}{e},+\infty\right)$ 【解析】由函数 $g(x)=xe^x$,得

$g'(x)=(x+1)e^x$，当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，所以 $g(x)\geqslant g(-1)=-\frac{1}{e}$，又当 $x<0$ 时，$g(x)<0$，$g(1)=e$，所以当 $x\in(-\infty,1]$，$-\frac{1}{e}\leqslant g(x)\leqslant e$，即函数 $g(x)$ 的值域为 $B=\left[-\frac{1}{e},e\right]$，又由函数 $f(x)=ax+e(a>0)$ 在区间 $[-1,2]$ 上单调递增，可得 $-a+e\leqslant f(x)\leqslant 2a+e$，即函数 $f(x)$ 的值域为 $A=[-a+e,2a+e]$，又由 $\forall x_2\in(-\infty,1]$，$\exists x_1\in[-1,2]$，使 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，即 $B\subseteq A$，则满足 $\begin{cases}e-a\leqslant-\frac{1}{e}\\2a+e\geqslant e\end{cases}$，解得 $a\geqslant e+\frac{1}{e}$，即实数 $a$ 的取值范围是 $\left[e+\frac{1}{e},+\infty\right)$.

故答案为 $\left[e+\frac{1}{e},+\infty\right)$.

16. $\left(\frac{16\sqrt{3}}{9},\frac{16\sqrt{3}}{9}+2\right)$ **【解析】** 由 $x^3-4x=x(x^2-4)=x(x+2)(x-2)=0\ (x\leqslant0)$，解得 $x=0$ 或 $x=-2$；由 $-\ln x=0\ (x>0)$，解得 $x=1$. 因为 $F(x)=f(f(x)-t)=0$，所以 $f(x)-t=0$ 或 $f(x)-t=1$ 或 $f(x)-t=-2$，即 $f(x)=t$ 或 $f(x)=t+1$ 或 $f(x)=t-2$，因为 $F(x)=f(f(x)-t)$ 有 5 个零点，所以函数 $f(x)$ 的图象与三条直线 $y=t$，$y=t+1$，$y=t-2$ 共有 5 个交点. 因为函数 $y=-\ln x$ 的图象与三条直线 $y=t$，$y=t+1$，$y=t-2$ 共有 3 个交点，所以 $f(x)=x^3-4x(x\leqslant0)$ 的图象与三条直线共有 2 个交点，当 $x\leqslant0$ 时，$f'(x)=3x^2-4=3\left(x+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，所以 $x\in\left(-\infty,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；$x\in\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，所以 $x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，$f(x)$ 取得极大值也即是最大值，$f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3-4\times\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{16\sqrt{3}}{9}$，$f(0)=0$，结合 $f(x)$ 的图象，




可知 $\begin{cases}t>\frac{16\sqrt{3}}{9}\\0<t-2<\frac{16\sqrt{3}}{9}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}t=\frac{16\sqrt{3}}{9}\\t-2<0\end{cases}$，解得 $\frac{16\sqrt{3}}{9}<t<\frac{16\sqrt{3}}{9}+2$. 故答案为 $\left(\frac{16\sqrt{3}}{9},\frac{16\sqrt{3}}{9}+2\right)$.

## 四、解答题

17. **解：**(1) 因为 $2ac\cos B=a^2-b^2+\frac{\sqrt{3}}{2}bc$，

由余弦定理得 $2ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=a^2-b^2+\frac{\sqrt{3}}{2}bc$，

所以 $c=\frac{\sqrt{3}}{2}b$，

又因为 $b=2\sqrt{3}$，所以 $c=3$. （2 分）

又 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{9}{2}$，所以 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{9}{2}$，即 $\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times3\sin A=\frac{9}{2}$，

所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又因为 $0<A<\frac{\pi}{2}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

（5 分）

(2)由(1)及余弦定理可知 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=12+9-2\times2\sqrt{3}\times3\cos\frac{\pi}{3}$,

即 $a^2=21-6\sqrt{3}$,所以 $a=\sqrt{21-6\sqrt{3}}<b=2\sqrt{3}$, (7 分)

又若 $C$ 为圆心,$r$ 为半径的圆与边 $AB$ 相切,

设切点为 $D$,则 $\sin A=\frac{CD}{AC}$,得 $CD=AC\sin A=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$,

所以要使以 $C$ 为圆心,$r$ 为半径的圆与边 $AB$ 有两个交点,必须满足 $3<r\leqslant\sqrt{21-6\sqrt{3}}$,

所以 $r$ 的取值范围为 $\left(3,\sqrt{21-6\sqrt{3}}\,\right]$. (10 分)

18. **解**:(1)选①:$\because a_1+a_2+\cdots+a_n=2^{n+1}-2$,

$n\geqslant2$ 时,$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=2^n-2$, (2 分)

$\therefore$两式相减得 $a_n=2^n$,即 $a_n=2^n\ (n\geqslant2)$, (4 分)

又当 $n=1$ 时,$a_1=2$,满足上式,

$\therefore a_n=2^n$. (5 分)

选②:$\because a_1a_2a_3\cdots a_n=2^{\frac{n^2+n}{2}}$,

$n\geqslant2$ 时,$a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}=2^{\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}}=2^{\frac{n^2-n}{2}}$, (2 分)

$\therefore$两式相除得 $a_n=2^n\ (n\geqslant2)$, (4 分)

当 $n=1$ 时,$a_1=2$,满足上式,

$\therefore a_n=2^n$. (5 分)

(2)由(1)可知,$n\in[2^{k-1},2^k)$,$k\in\mathbf{N}^*$,$[2^{k-1},2^k)$上所有整数依次为 $2^{k-1},2^{k-1}+1,2^{k-1}+2,\cdots,2^{k-1}+(2^{k-1}-1)$, (8 分)

它们构成首项为 $2^{k-1}$,公差为 1 的等差数列,且项数为 $2^{k-1}$,

所以 $T=2^{k-1}+(2^{k-1}+1)+(2^{k-1}+2)+\cdots+[2^{k-1}+(2^{k-1}-1)]$

$=2^{k-1}\cdot2^{k-1}+\frac{(2^{k-1}-1)2^{k-1}}{2}=3\times2^{2k-3}-2^{k-2}$. (12 分)

19. **证明**:(1)因为 $ABCD$ 为菱形且$\angle BAD=60°$,

所以$\triangle BCD$ 为等边三角形,又因为点 $E$ 为 $BC$ 中点,

故 $DE\perp BC$. (2 分)

在正三角形 $PBC$ 中,$PE\perp BC$,$DE\cap PE=E$,$DE$,$PE\subset$平面 $DEP$,

所以 $BC\perp$平面 $DEP$,

因为 $PF\subset$平面 $DEP$,

所以 $BC\perp PF$. (4 分)

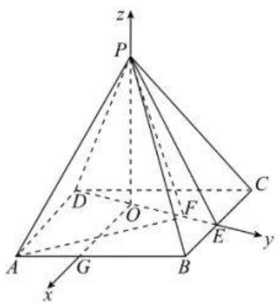
(2)由 $PE\perp BC$,$DE\perp BC$,可得$\angle DEP$ 就是二面角 $A-BC-P$ 的平面角,所以$\angle DEP=60°$, (5 分)

在$\triangle DEP$ 中,$PE=DE=\sqrt{3}$,所以$\triangle DEP$ 为边长为 $\sqrt{3}$ 的等边三角形,取 $DE$ 中点 $O$,则 $PO\perp DE$,又由(1)可知,平面 $DEP\perp$底面 $ABCD$,平面 $DEP\cap$底面 $ABCD=DE$,

所以 $PO\perp$底面 $ABCD$. 过点 $O$ 作 $BC$ 的平行线交 $AB$ 于点 $G$,

则 $OG\perp DE$,所以 $OG$,$OE$,$OP$ 两两相互垂直,

所以以 $O$ 为坐标原点,以$\overrightarrow{OG}$,$\overrightarrow{OE}$,$\overrightarrow{OP}$所在的方向分别为 $x$,$y$,$z$ 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$, (6 分)



在△$POE$中，$OE=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$OP=\frac{3}{2}$，

可得 $A\left(2,-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$B\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$E\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，

$P\left(0,0,\frac{3}{2}\right)$，$D\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，

因为 $3\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{DF}$，所以 $F\left(0,\frac{\sqrt{3}}{4},0\right)$，

所以 $\overrightarrow{AF}=\left(-2,\frac{3\sqrt{3}}{4},0\right)$，$\overrightarrow{PF}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{3}{2}\right)$，

$\overrightarrow{PB}=\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)$，　　(8分)

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 $PAF$ 的一个法向量，则

有 $\begin{cases}-2x+\frac{3\sqrt{3}}{4}y=0\\ \frac{\sqrt{3}}{4}y-\frac{3}{2}z=0\end{cases}$，

令 $y=4$，则 $x=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$z=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，得 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},4,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，　　(10分)

设直线 $PB$ 与平面 $PAF$ 所成角为 $\theta$，

则有 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PB}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{PB}|}=\frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{2\times\frac{17}{2\sqrt{3}}}=\frac{15}{34}<\frac{1}{2}$，所以 $0<\theta<\frac{\pi}{6}$，

故直线 $PB$ 与平面 $PAF$ 所成的角小于 $\frac{\pi}{6}$ 得证.

(12分)

20. **解**：(1)若选择方案一，由条件可知 $X$ 可能的取值为 3，4，5，6，

$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$，$P(X=4)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{37}{72}$，

$P(X=5)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$，$P(X=6)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$，　　(4分)

∴$X$ 的分布列为：

| X | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| P | $\frac{1}{8}$ | $\frac{37}{72}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{36}$ |

(5分)

$E(X)=3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{37}{72}+5\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{36}=\frac{307}{72}\approx4.26$ 百元.(写成分数形式亦可给分)　　(6分)

(2)对于方案二，由条件可得 $Y$ 可能的取值为 3，4，5，6，

$P(Y=3)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}$，$P(Y=4)=\frac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}=\frac{9}{20}$，

$P(Y=5)=\frac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}=\frac{9}{20}$，$P(Y=6)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}$，

(10分)

∴$Y$ 的期望值 $E(Y)=3\times\frac{1}{20}+4\times\frac{9}{20}+5\times\frac{9}{20}+6\times\frac{1}{20}=\frac{9}{2}=4.5$ 百元.

∵$E(Y)>E(X)$，所以参与者选择方案二获得奖金数额的数学期望值会更高.

所以作为参与者，应该选择方案二.　　(12分)

21. **解**：(1)由题可知焦点的坐标为 $\left(0,\frac{p}{2}\right)$，

所以由抛物线的定义可知 $|MF|=1+\frac{p}{2}=2$，

(2分)

即 $p=2$，所以抛物线 $C$ 的方程为 $x^2=4y$.　　(4分)

(2)易知直线 $AB$ 的斜率存在且不为零，设直线 $AB$ 的方程为 $y=k(x+1)(k\neq0)$，

$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}y=k(x+1)\\x^2=4y\end{cases}$，得 $x^2-4kx-4k=0$，（5 分）

则 $\Delta=16k^2+16k>0$，即 $k>0$ 或 $k<-1$，$x_1x_2=-4k$.（6 分）

易知直线 $AQ$ 的方程为 $y=\frac{y_1+2}{x_1}x-2$，

由$\begin{cases}y=\frac{y_1+2}{x_1}x-2\\x^2=4y\end{cases}$，得 $x^2-\frac{4(y_1+2)}{x_1}x+8=0$，（8 分）

设 $E(x_3,y_3)$，则 $x_1x_3=8$，得 $x_3=\frac{8}{x_1}$，

设 $F(x_4,y_4)$，同理可得 $x_4=\frac{8}{x_2}$，（9 分）

则$\frac{S_{\triangle QAB}}{S_{\triangle QEF}}=\frac{\frac{1}{2}|QA|\cdot|QB|\sin\angle AQB}{\frac{1}{2}|QE|\cdot|QF|\sin\angle AQB}$

$=\frac{|QA|\cdot|QB|}{|QE|\cdot|QF|}=\frac{y_1+2}{y_3+2}\cdot\frac{y_2+2}{y_4+2}$

$=\frac{\left(\frac{1}{4}x_1^2+2\right)\left(\frac{1}{4}x_2^2+2\right)}{\left(\frac{1}{4}x_3^2+2\right)\left(\frac{1}{4}x_4^2+2\right)}$

$=\frac{\frac{1}{16}(x_1^2+8)(x_2^2+8)}{16\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{8}\right)\cdot16\left(\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{8}\right)}$

$=\frac{\frac{1}{16}(x_1^2+8)(x_2^2+8)}{\frac{2(x_1^2+8)2(x_2^2+8)}{x_1^2x_2^2}}$

$=\frac{x_1^2x_2^2}{64}=\frac{16k^2}{64}=\frac{k^2}{4}=\frac{1}{3}$，（11 分）

得 $k^2=\frac{4}{3}$，$k=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

故直线 $AB$ 的方程为 $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}(x+1)$ 或 $y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}(x+1)$.（12 分）

22. **解**：(1) 令 $f(x)=0$，即得 $ae^x-x^2+3=0$，

即 $a=\frac{x^2-3}{e^x}$方程有三个零点，即直线 $y=a$ 与曲线 $g(x)=\frac{x^2-3}{e^x}$有三个不同的交点.

$g'(x)=\frac{2x-x^2+3}{e^x}=-\frac{x^2-2x-3}{e^x}=-\frac{(x+1)(x-3)}{e^x}$，

所以当 $x\in(-\infty,-1)$ 或 $x\in(3,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

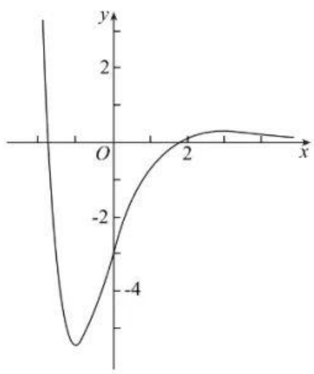
当 $x\in(-1,3)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

所以当 $x=-1$ 时，$g(x)$ 有极小值为 $g(x)=-2e$，（3 分）

当 $x=3$ 时，$g(x)$ 有极大值为 $g(x)=\frac{6}{e^3}$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to0$，

且当 $|x|\geqslant\sqrt{3}$ 时，$g(x)>0$，

所以作出函数 $g(x)=\frac{x^2-3}{e^x}$的图象如图所示，




所以数形结合可知 $0<a<\frac{6}{e^3}$.（5 分）

(2) 因为 $\varphi(x)=-x^2+2x+4-f(x)=2x+1-ae^x$，

当 $a\leqslant0$ 时，$\varphi(x)$ 单调递增，不可能有两个零点，所以 $a>0$，此时 $\varphi'(x)=2-ae^x$，

令 $\varphi'(x)=0$，得 $x=\ln\frac{2}{a}$，

所以当 $x\in\left(-\infty,\ln\frac{2}{a}\right)$ 时，$\varphi'(x)>0$；当 $x\in\left(\ln\frac{2}{a},+\infty\right)$ 时，$\varphi'(x)<0$.

故 $\varphi(x)$ 在区间 $\left(-\infty,\ln\frac{2}{a}\right)$ 上单调递增，在区间 $\left(\ln\frac{2}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，

所以 $\varphi\left(\ln\frac{2}{a}\right)=2\ln\frac{2}{a}+1-2=2\ln\frac{2}{a}-1$，（7 分）

若 $\varphi(x)$ 有两个零点，则 $\varphi\left(\ln\frac{2}{a}\right)>0$，得 $\ln\frac{2}{a}>\frac{1}{2}$，所以 $0<a<\frac{2\sqrt{e}}{e}$，

当 $0<a<\frac{2\sqrt{e}}{e}$ 时，$\varphi\left(\ln\frac{2}{a}\right)>0$，$\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)=-ae^{-\frac{1}{2}}<0$，$\ln\frac{2}{a}>\frac{1}{2}>-\frac{1}{2}$，

故存在 $x_1\in\left(-\frac{1}{2},\ln\frac{2}{a}\right)$，使得 $f(x_1)=0$.

又当 $x$ 趋向于 $+\infty$ 时，$\varphi(x)$ 趋向于 $-\infty$，

故存在 $x_2\in\left(\ln\frac{2}{a},+\infty\right)$，使得 $f(x_2)=0$，

故 $0<a<\frac{2\sqrt{e}}{e}$.　　（8 分）

所以由题可得 $\begin{cases}2x_1+1=ae^{x_1}\\2x_2+1=ae^{x_2}\end{cases}$，得 $\frac{2x_2+1}{2x_1+1}=e^{x_2-x_1}$，

即 $\sqrt{\frac{2x_2+1}{2x_1+1}}=e^{\frac{x_2-x_1}{2}}$；

要证 $\sqrt{\frac{2x_2+1}{2x_1+1}}<\frac{e^{x_2}-e^{-x_1}}{x_2+x_1}$，只需证 $e^{\frac{x_2-x_1}{2}}<\frac{e^{x_2}-e^{-x_1}}{x_2+x_1}$，

两边同乘以 $e^{x_1}$，得 $e^{\frac{x_2+x_1}{2}}<\frac{e^{x_2+x_1}-1}{x_2+x_1}$.

因为 $x_1>-\frac{1}{2}$，$x_2>\ln\frac{2}{a}>\frac{1}{2}$，所以 $x_1+x_2>0$.

令 $t=\frac{x_1+x_2}{2}>0$，即证 $e^t<\frac{e^{2t}-1}{2t}$，

即证 $e^{2t}-2te^t-1>0$.　　（10 分）

令 $h(t)=e^{2t}-2te^t-1(t>0)$，

$h'(t)=2e^{2t}-2(t+1)e^t=2e^t(e^t-t-1)$.

令 $H(t)=e^t-t-1(t>0)$，$H'(t)=e^t-1>0$，

故 $H(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $H(t)>H(0)=0$，因此 $h'(t)>0$，所以 $h(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $h(t)>h(0)=0$，因此原不等式成立.　　（12 分）

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。