2023届高三开学摸底联考 全国卷
理 科 数 学 试 卷

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为120分钟，满分150分

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $A=\{x\mid 0<x\leqslant 3\}$，$B=\{0,1,2,3,4,5\}$，则 $(\complement_{R}A)\cap B=$

A.$\{4,5\}$　　B.$\{0,4,5\}$　　C.$\{3,4,5\}$　　D.$\{0,3,4,5\}$

2.命题"$\exists x_0>0,-x_0^2+2x_0-1>0$"的否定为

A. $\exists x_0>0,-x_0^2+2x_0-1\leqslant 0$　　B. $\exists x_0\leqslant 0,-x_0^2+2x_0-1>0$

C. $\forall x>0,-x^2+2x-1\leqslant 0$　　D. $\forall x\leqslant 0,-x^2+2x-1>0$

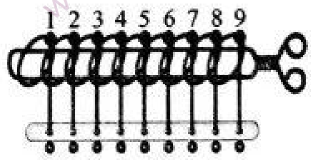
3.已知点 $P(4,3)$ 是角 α 的终边上一点，则 $\tan\frac{\alpha}{2}=$

A.$\frac{1}{3}$　　B.$\pm\frac{1}{3}$　　C.3或 $\frac{1}{3}$　　D.3

4.三名同学到五个社区参加社会实践活动，要求每个社区有且只有一名同学，每名同学至多去两个社区，则不同的派法共有

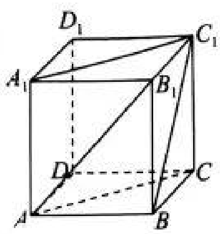
A.90种　　B.180种　　C.125种　　D.243种

5.九连环是一种流传于我国民间的传统智力玩具.它用九个圆环相连成串，以解开为胜.它在中国有近两千年的历史，《红楼梦》中有林黛玉巧解九连环的记载.周邦彦也留下关于九连环的名句"纵妙手、能解连环."九连环有多种玩法，在某种玩法中：已知解下1个圆环最少需要移动圆环1次，解下2个圆环最少需要移动圆环2次，记 $a_n(3\leqslant n\leqslant 9,n\in\mathbf{N}^*)$ 为解下 n 个圆环需要移动圆环的最少次数，且 $a_n=a_{n-2}+2^{n-1}$，则解下8个圆环所需要移动圆环的最少次数为



A.30　　B.90　　C.170　　D.341

6.如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=2$，若直线 AB_1 与平面 ACC_1A_1 所成的角为30°，则直线 BC_1 与直线 AC 所成的角为



A.30°　　B.45°

C.60°　　D.90°

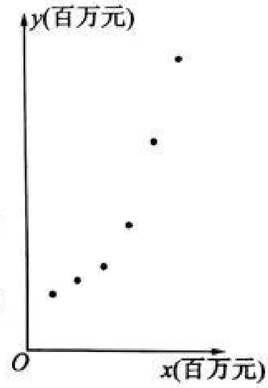
7.若直线 $l:kx-y+2-k=0$ 与圆 $C:x^2+y^2-4x-2y-4=0$ 交于 A,B 两点，则当△ABC 周长的最小时，$k=$

A.$\frac{1}{2}$　　B.$-\frac{1}{2}$　　C.1　　D.-1

8.已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，若对任意的 $x>0$，都有 $f'(x)>\frac{2}{x}$，且 $f(e)=3$，则不等式 $f(x)>2\ln x+1$ 的解集为

A.$(e,+\infty)$　　B.$(2e,+\infty)$　　C.$(0,e)$　　D.$(0,2e)$

9.某企业秉承"科学技术是第一生产力"的发展理念，投入大量科研经费进行技术革新，该企业统计了最近 6 年投入的年科研经费 x（单位：百万元）和年利润 y（单位：百万元）的数据，并绘制成如图所示的散点图.已知 x,y 的平均值分别为 $\bar{x}=7,\bar{y}=10$.甲统计员得到的回归方程为 $\hat{y}=1.69x+\hat{a}$；乙统计员得到的回归方程为 $\hat{y}=2.52e^{0.17x}$；若甲、乙二人计算均未出现错误，有下列四个结论：



①当投入年科研经费为 20（百万元）时，按乙统计员的回归方程可得年利润估计值为 75.6（百万元）（取 $e^{3.4}=30$）；

②$\hat{a}=-1.83$；

③方程 $\hat{y}=1.69x+\hat{a}$ 比方程 $\hat{y}=2.52e^{0.17x}$ 拟合效果好；

④y 与 x 正相关.

以上说法正确的是

A.①③④　　B.②③　　C.②④　　D.①②④

10.已知定义域为 **R** 的偶函数 $f(x)$ 的图象是连续不间断的曲线，且 $f(x+2)+f(x)=f(1)$，对任意的 $x_1,x_2\in[-2,0]$，$x_1\neq x_2$，$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 恒成立，则 $f(x)$ 在区间 $[-100,100]$ 上的零点个数为

A.100　　B.102　　C.200　　D.202

11.将函数 $f(x)=2\cos^2\frac{x}{2}-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$，再向左平移 φ（$\varphi>0$）个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，若对任意的 $x\in\mathbf{R}$，均有 $g(x)\leqslant g\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 成立，则 φ 的最小值为

A.$\frac{\pi}{24}$　　B.$\frac{\pi}{12}$　　C.$\frac{\pi}{6}$　　D.$\frac{\pi}{3}$

12.已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，其一条渐近线为 $y=\sqrt{3}x$，直线 l 过点 F_2 且与双曲线 C 的右支交于 A,B 两点，M,N 分别为△AF_1F_2 和△BF_1F_2 的内心，则 $|MN|$ 的取值范围为

A.$[a,2a)$　　B.$[a,2a]$　　C.$\left[2a,\frac{4\sqrt{3}}{3}a\right]$　　D.$\left[2a,\frac{4\sqrt{3}}{3}a\right)$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13.若 $z=\frac{1-ai}{2+i}$（i为虚数单位）为纯虚数，则实数 a 的值为________.

14.若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\leq 0,\\x-y+1\geq 0,\\y\geq 0,\end{cases}$ 则 $z=x-2y$ 的最小值为________.

15.已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_{11}>S_{10}>S_{12}$，则满足 $S_n>0$ 的正整数 n 的最大值为________.

16.在三棱锥 $S-ABC$ 中，底面 ABC 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的正三角形，$SA=AB$，点 M 为 $\triangle SAB$ 的垂心，且 $CM\perp$ 平面 SAB，则三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的体积为________.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：60分。

17.（12分）已知 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边，向量 $\boldsymbol{m}=(\sin B-\sin A,\sin C-\sin A)$，$\boldsymbol{n}=(a+c,b)$，且 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$.

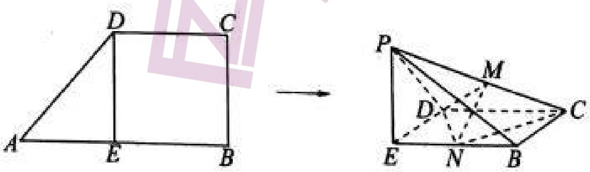
（1）求角 C；

（2）若 $b=4$，$\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$，D 为 BC 中点，求线段 AD 的长.

18.（12分）如图，梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，$BC=CD=2$，$AD=\sqrt{5}$，$DE\perp AB$，垂足为点 E.将 $\triangle AED$ 沿 DE 折起，使得点 A 到点 P 的位置，且 $PE\perp EB$，连接 PB、PC，M，N 分别为 PC 和 EB 的中点.

（1）证明：$MN/\!/$平面 PED；

（2）求二面角 $D-MN-C$ 的正弦值.



19.（12分）乒乓球是我国的国球，“乒乓精神”激励了一代又一代国人.为弘扬国球精神，传承乒乓球文化，强健学生体魄，某中学举行了乒乓球单打比赛.比赛采用7局4胜制，每局比赛为11分制，选手只要得到至少11分，并且领先对方至少2分（包括2分），即赢得该局比赛.在一局比赛中，每人只发2个球就要交换发球权，如果双方比分为10：10后，每一个球就要交换一个发球权.经过紧张的角逐，甲、乙两位选手进入了决赛.

（1）若甲赢得每局比赛的概率为 $\frac{2}{3}$，求甲以4：1赢得比赛的概率；

（2）若在某一局比赛中，双方战成10：10，且甲获得了下一球的发球权，若甲发球时甲赢1分

的概率为$\frac{3}{4}$,乙发球时甲赢1分的概率为$\frac{1}{2}$,求两人打了$\xi(\xi\leqslant 5,\xi\in \mathbf{N})$个球后,甲赢得了该局比赛的概率.

20.(12分)已知椭圆C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{6}$,且经过点$E(\sqrt{6},\sqrt{15})$.

(1)求椭圆C的方程;

(2)若过点$M(3,0)$的直线l与椭圆C交于P,Q两点,点P关于x轴的对称点为N,求$\triangle MNQ$面积的最大值.

21.(12分)已知函数$f(x)=e^x-ax-1$.

(1)当$a=1$时,求$f(x)$的单调区间;

(2)证明:当$a\leqslant 2$时,$f(x)\geqslant 1-(\sin x+\cos x)$对任意的$x\in(0,+\infty)$恒成立.

(二)选考题:共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.[选修4—4:坐标系与参数方程](10分)

在平面直角坐标系xOy中,直线l的参数方程为$\begin{cases}x=2+t\cos\alpha,\\y=1+t\sin\alpha\end{cases}$($t$为参数,$0\leqslant\alpha<\pi$).以坐标原点为极点,$x$轴正半轴为极轴,建立极坐标系,曲线$C$的极坐标方程为$\rho^2-2\sqrt{2}\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-7=0$.

(1)求曲线C的直角坐标方程;

(2)若直线l与曲线C交于A,B两点,当$|AB|=\sqrt{34}$时,求直线l的普通方程.

23.[选修4—5:不等式选讲](10分)

已知$f(x)=|x+1|,g(x)=|a-x|$.

(1)当$a=1$时,求不等式$f(x)-g(x)\leqslant 1$的解集;

(2)若$f(x)-g(x)\leqslant 2$恒成立,求实数a的取值范围.

2023 届高三开学摸底联考　全国卷

理科数学参考答案及评分意见

1.B 【解析】因为 $\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|x\leqslant 0$ 或 $x>3\}$，所以 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{0,4,5\}$，故选 B.

2.C 【解析】由特称命题的否定为全称命题得，该命题的否定为"$\forall x>0,-x^2+2x-1\leqslant 0$".故选 C.

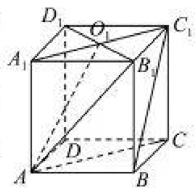
3.A 【解析】由 $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}=\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{\tan^2\frac{\alpha}{2}+1}$，解得 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\pm\dfrac{1}{3}$，

因为 $2k\pi<\alpha<2k\pi+\dfrac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$，所以 $k\pi<\dfrac{\alpha}{2}<k\pi+\dfrac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$，故 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{3}$.故选 A.

4.A 【解析】$\dfrac{C_5^2\times C_3^2}{A_2^2}\times A_3^3=90$.故选 A.

5.C 【解析】由题，$a_8=a_6+2^7,a_6=a_4+2^5,a_4=a_2+2^3=2+2^3$，所以 $a_8=2+2^3+2^5+2^7=170$.故选 C.

6.C 【解析】连接 B_1D_1，与 A_1C_1 交于点 O_1，连接 AO_1，易得 $\angle B_1AO_1$ 即为直线 AB_1 与平面 ACC_1A_1 所成的角，所以 $\angle B_1AO_1=30°$.因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是长方体，所以 $AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，所以 $AA_1\perp O_1B_1$，又 $O_1B_1\perp A_1C_1$，所以 $O_1B_1\perp$ 平面 AA_1C_1C，所以 $O_1B_1\perp O_1A$，即 $\triangle AO_1B_1$ 是直角三角形.由题，$B_1O_1=\sqrt{2}$，所以 $AB_1=2\sqrt{2}$，设 $AA_1=a$，则 $AB_1=\sqrt{AB^2+BB_1^2}=\sqrt{4+a^2}=2\sqrt{2}$，得 $a=2$，又 $AC\,/\!/\,A_1C_1$，所以 $\angle A_1C_1B$ 即为直线 BC_1 与直线 AC 所成的角，易得 $\angle A_1C_1B=60°$.



7.C 【解析】直线 l 恒过点 $D(1,2)$，圆心 $C(2,1)$，又因为点 D 在圆内，当 $CD\perp l$ 时，$|AB|$ 最小，$\triangle ABC$ 周长最小，由 $C(2,1),D(1,2)$ 易得 $k_{CD}=-1$，所以 $k=1$.故选 C.

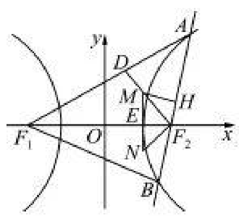
8.A 【解析】令 $g(x)=f(x)-2\ln x$，则 $g'(x)=f'(x)-\dfrac{2}{x}>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$g(\mathrm{e})=f(\mathrm{e})-2\ln\mathrm{e}=1$，$f(x)>2\ln x+1$ 等价于 $f(x)-2\ln x>1$，即 $g(x)>g(\mathrm{e})$，即 $x>\mathrm{e}$，所以不等式 $f(x)>2\ln x+1$ 的解集为 $(\mathrm{e},+\infty)$.故选 A.

9.D 【解析】将 $x=20$ 代入 $\hat{y}=2.52e^{0.17x}$ 得 $\hat{y}=75.6$，①正确；将 $\bar{x}=$[illegible]，$\bar{y}=$[illegible] 代入 $\hat{y}=1.69x+\hat{a}$ 得 $\hat{a}=-1.83$，②正确；由散点图可知，回归方程 $\hat{y}=2.52e^{0.17x}$ 比 $\hat{y}=1.69x+\hat{a}$ 的拟合效果更好，③错误；因为 y 随 x 的增大而增大，所以 y 与 x 正相关，④正确.故①②④正确.故选 D.

10.A 【解析】令 $x=-1$，得 $f(1)+f(-1)=f(1)$，即 $f(-1)=0$，又 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上单调递增，因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(1)=0$，$f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，$f(x+2)+f(x)=f(1)=0$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数，$f(x)$ 在一个周期内有两个零点，故 $f(x)$ 在区间 $[-100,100]$ 上的零点个数为 $50\times 2=100$.故选 A.

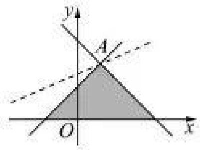
11.B 【解析】$f(x)=2\times\dfrac{1+\cos x}{2}-\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x+1=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+1$，$g(x)=\sin\left(2x+2\varphi+\dfrac{\pi}{6}\right)+1$，因为 $g(x)\leqslant g\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ 恒成立，所以 $g(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 处取得最大值，故 $2\varphi+\dfrac{\pi}{3}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$，因为 $\varphi>0$，当 $k=0$ 时，φ 取得最小值 $\dfrac{\pi}{12}$.故选 B.

12.D 【解析】设焦距为 $2c$，由题可知 $\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$，故 $c=2a$，如图，过点 M 分别作 F_1A,F_1F_2,AF_2 的垂线，垂足分别为 D,E,H，易得 $|F_1D|=|F_1E|$，$|F_2E|=|F_2H|$，$|AD|=|AH|$，因为 $|AF_1|-|AF_2|=2a$，所以 $|F_1E|-|F_2E|=2a$，又 $|F_1E|+|F_2E|=2c$，得 $|F_2E|=c-a=a$，所以 $E(a,0)$，M 点横坐标为 a，同理可得 N 点横坐标也为 a.设直线 l 的倾斜角为 α，易得 $\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\dfrac{2}{3}\pi$，则 $\angle MF_2E=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}$，$\angle NF_2E=\dfrac{\alpha}{2}$，所以 $|ME|=\dfrac{a}{\tan\frac{\alpha}{2}}$，$|NE|=a\tan\dfrac{\alpha}{2}$，故 $|MN|=a\tan\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{a}{\tan\frac{\alpha}{2}}$，因为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}<\tan\dfrac{\alpha}{2}<\sqrt{3}$，由对勾函数性质可得 $2a\leqslant|MN|<\dfrac{4\sqrt{3}}{3}a$.故选 D.



13.2 【解析】$z=\frac{(1-a\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\frac{2-a}{5}+\frac{-2a-1}{5}\mathrm{i}$ 为纯虚数，所以 $\frac{2-a}{5}=0$，所以 $a=2$.

14.$-\frac{5}{2}$ 【解析】可行域如下图所示，当直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}z$ 过点 $A\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ 时，z 取得最小值 $-\frac{5}{2}$.



15.21 【解析】由题意可得 $\begin{cases}a_{11}>0,\\a_{12}<0,\\a_{11}+a_{12}<0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a_1+a_{21}=2a_{11}>0,\\a_1+a_{23}=2a_{12}<0,\\a_1+a_{22}=a_{11}+a_{12}<0,\end{cases}$ 故 $\begin{cases}S_{21}>0,\\S_{23}<0,\\S_{22}<0,\end{cases}$

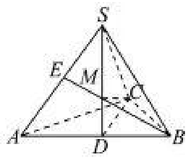
所以满足 $S_n>0$ 的正整数 n 的最大值为 21.

16.$9\sqrt{2}\pi$ 【解析】如图，连接 SM 并延长，交 AB 于点 D，BM 与 SA 交于点 E，

则 $SD\perp AB$，$BE\perp SA$.因为 $CM\perp$ 平面 SAB，$AB\subset$ 平面 SAB，所以 $CM\perp AB$.

因为 $CM\cap SD=M$，CM，$SD\subset$ 平面 SCD，所以

$AB\perp$ 平面 SCD，所以 $CD\perp AB$，故 D 为 AB 中点，所以 $\triangle SAB$ 是等边三角形，$SA=SB=AB=2\sqrt{3}$，



易得 $SM=BM=2$，$CM=2\sqrt{2}$，所以 $SC=2\sqrt{3}$，所以三棱锥 $S-ABC$ 的外接球即为棱长为 $\sqrt{6}$ 的正方体的外接球，所以外接球半径 $R=\frac{1}{2}\times\sqrt{6+6+6}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，故外接球体积 $V=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^3=9\sqrt{2}\pi$.

17.【解】(1)因为 $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$，所以 $(\sin B-\sin A)\times b=(a+c)(\sin C-\sin A)$，

由正弦定理得 $(b-a)\times b=(a+c)(c-a)$，……………………………… 2 分

即 $a^2+b^2-c^2=ab$.

由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$. ……………………………… 4 分

因为 $0<C<\pi$，

所以 $C=\frac{\pi}{3}$. ……………………………… 6 分

(2)$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}a\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$，

解得 $a=6$. ……………………………… 8 分

因为 D 为 BC 中点，所以 $CD=3$.

在 $\triangle CAD$ 中，$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos C$，……………………………… 10 分

即 $AD^2=16+9-2\times4\times3\times\frac{1}{2}=13$，

所以 $AD=\sqrt{13}$. ……………………………… 12 分

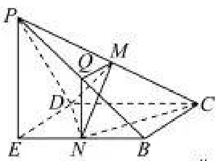
18.【解】(1)如图，取 PB 中点 Q，连接 MQ，NQ，因为 M，Q 分别为 PC 和 PB 的中点，故 $MQ\parallel BC\parallel DE$. ……………… 2 分

又 $DE\subset$ 平面 PED，$MQ\not\subset$ 平面 PED，所以 $MQ\parallel$ 平面 PED.

同理 $NQ\parallel$ 平面 PED.

又 $MQ\cap NQ=Q$，$MQ\subset$ 平面 MNQ，$NQ\subset$ 平面 MNQ，

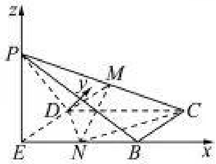
所以平面 $MNQ\parallel$ 平面 PED. ……………………………… 4 分



因为 $MN\subset$ 平面 MNQ，所以 $MN\parallel$ 平面 PED. ……………………………… 5 分

(2)由题，$PE\perp EB$，$PE\perp ED$，$DE\perp EB$，以 E 为坐标原点，EB，ED，EP 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $D(0,2,0)$，$M\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$，$N(1,0,0)$，$C(2,2,0)$，则 $\overrightarrow{DM}=\left(1,-1,\frac{1}{2}\right)$，

$\overrightarrow{DN}=(1,-2,0)$，……………………………… 6 分



设平面 DMN 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DM}=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DN}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x-y+\frac{1}{2}z=0,\\x-2y=0,\end{cases}$ 令 $x=2$，得 $y=1$，$z=-2$，

所以 $\boldsymbol{m}=(2,1,-2)$. ………………………………………………………… 8 分

同理可得平面 CMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-1,2)$. ………………………………………… 9 分

$\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4-1-4}{3\times3}=-\dfrac{1}{9}$, ………………………………………… 11 分

所以二面角 $D-MN-C$ 的正弦值为 $\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{9}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$. ………………………………………… 12 分

19.【解】(1)甲以 4∶1 赢得比赛，则前 4 局中甲赢得了 3 局，第 5 局甲获胜， ………………………… 2 分

所以甲以 4∶1 赢得比赛概率为 $P=C_4^3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{64}{243}$. ………………………………… 5 分

(2)因为 $\xi\leqslant5,\xi\in\mathbf{N}$，所以在该局比赛中，甲只可能以 12∶10 或 13∶11 获胜，

故 ξ 的可能取值为 2，4，设甲赢得该局比赛的概率为 $P(\xi)$. ………………………………………… 6 分

$P(\xi=2)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}$,

$P(\xi=4)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{16}$, ………………………………………… 10 分

所以求两人打了 $\xi(\xi\leqslant5,\xi\in\mathbf{N})$ 个球后甲赢得了该局比赛的概率为

$P=P(\xi=2)+P(\xi=4)=\dfrac{3}{8}+\dfrac{3}{16}=\dfrac{9}{16}$. ………………………………………… 12 分

20.【解】(1)设椭圆 C 的焦距为 $2c$，则 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，即 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=\dfrac{1}{6}$,

所以 $1-\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{6}$，即 $a^2=\dfrac{6}{5}b^2$……①. ………………………………………… 2 分

又椭圆 C 经过点 $(\sqrt{6},\sqrt{15})$，则 $\dfrac{6}{a^2}+\dfrac{15}{b^2}=1$……②. ………………………………………… 4 分

由①②解得 $a^2=24,b^2=20$.

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{20}=1$. ………………………………………… 5 分

(2)当直线 l 垂直于坐标轴时，点 M,N,Q 不能构成三角形，不符合题意. ………………………………… 6 分

当直线 l 不垂直于坐标轴时，设 $l:x=my+3(m\neq0)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $N(x_1,-y_1)$.

联立 $\begin{cases}x=my+3,\\ \dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{20}=1,\end{cases}$ 得 $(5m^2+6)y^2+30my-75=0$, ………………………………… 7 分

则 $y_1+y_2=-\dfrac{30m}{5m^2+6}$，$y_1y_2=-\dfrac{75}{5m^2+6}$.

又 $S_{\triangle PQN}=\dfrac{1}{2}\times|2y_1|\times|x_2-x_1|$，$S_{\triangle PMN}=\dfrac{1}{2}\times|2y_1|\times|3-x_1|$, ………………………………… 9 分

易知 x_2-x_1 与 $3-x_1$ 同号,

所以 $S_{\triangle MNQ}=S_{\triangle PQN}-S_{\triangle PMN}=|y_1|\times(|x_2-x_1|-|3-x_1|)=|y_1|\times|(x_2-x_1)-(3-x_1)|$

$=|y_1|\times|x_2-3|=|y_1|\times|my_2|=|my_1y_2|$

$=\dfrac{75|m|}{5m^2+6}=\dfrac{75}{5|m|+\dfrac{6}{|m|}}\leqslant\dfrac{75}{2\sqrt{5|m|\times\dfrac{6}{|m|}}}=\dfrac{5\sqrt{30}}{4}$,

当且仅当 $5|m|=\dfrac{6}{|m|}$，即 $m=\pm\dfrac{\sqrt{30}}{5}$ 时等号成立， ………………………………………… 11 分

所以 $\triangle MNQ$ 面积的最大值为 $\dfrac{5\sqrt{30}}{4}$. ………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-x-1$，则 $f'(x)=e^x-1$， ………………………………………… 1 分

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减. ………………………………………… 3 分

综上，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，单调递减区间为 $(-\infty,0)$. ………………………………… 4 分

(2)证明：由 $f(x)>1-(\sin x+\cos x)$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立得

$e^x+\sin x+\cos x-ax-2>0$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.

当 $a=1$ 时,由(1)知,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以当 $x>0$ 时,$f(x)>f(0)=0$,

即当 $x>0$ 时,$e^x>x+1$. ………………………………………………………………………………… 6 分

设 $p(x)=x-\sin x(x>0)$,则 $p'(x)=1-\cos x\geqslant 0$,所以 $p(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

故当 $x>0$ 时,$p(x)>p(0)=0$,即当 $x>0$ 时,$x>\sin x$,

所以当 $x>0$ 时,$e^x>x+1>\sin x+1\geqslant \sin x+\cos x$,

即 $e^x-\sin x-\cos x>0$……①. ………………………………………………………………………………… 8 分

设 $g(x)=e^x+\sin x+\cos x-ax-2$,则 $g'(x)=e^x+\cos x-\sin x-a$,

设 $t(x)=e^x+\cos x-\sin x-a$,则 $t'(x)=e^x-\sin x-\cos x$,

由①式知当 $x>0$ 时,$t'(x)>0$,所以 $t(x)$ 即 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $g'(x)>g'(0)=2-a$, ………………………………………………………………………………… 10 分

当 $a\leqslant 2$ 时,$g'(x)>0$,所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

故 $g(x)>g(0)=0$,即 $e^x+\sin x+\cos x-ax-2>0$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立,

即 $f(x)>1-(\sin x+\cos x)$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立. …………………………………………… 12 分

22.【解】(1)由 $\rho^2-2\sqrt{2}\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-7=0$ 得 $\rho^2-2\rho\sin\theta-2\rho\cos\theta-7=0$, ………………… 2 分

即 $x^2+y^2-2x-2y-7=0$,

即 $(x-1)^2+(y-1)^2=9$. ………………………………………………………………………………… 4 分

(2)将 $\begin{cases}x=2+t\cos\alpha,\\ y=1+t\sin\alpha,\end{cases}$ (t 为参数,$0\leqslant\alpha<\pi$)代入 $(x-1)^2+(y-1)^2=9$,

整理得 $t^2+2t\cos\alpha-8=0$.

设 A,B 所对应的参数分别为 t_1,t_2,

则 $t_1+t_2=-2\cos\alpha,t_1t_2=-8$. ……………………………………………………………………… 6 分

所以 $|AB|=|t_2-t_1|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{4\cos^2\alpha+32}=\sqrt{34}$,

解得 $\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\alpha=\frac{\pi}{4}$ 或 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$, ……………………………………………………… 8 分

故直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\end{cases}$ (t 为参数)或 $\begin{cases}x=2-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\end{cases}$ (t 为参数),

所以直线 l 的直角坐标方程为 $x-y-1=0$ 或 $x+y-3=0$. …………………………………………… 10 分

23.【解】(1)由题,当 $a=1$ 时,$f(x)-g(x)\leqslant 1\Leftrightarrow |x+1|-|1-x|\leqslant 1$, ………………………… 1 分

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2\leqslant 1,x\leqslant -1,\\ 2x\leqslant 1,-1<x<1,\\ 2\leqslant 1,x\geqslant 1,\end{cases}$ ………………………………………………………………………… 3 分

解得 $x\leqslant\frac{1}{2}$,

所以不等式的解集为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$. ……………………………………………………………… 5 分

(2)$f(x)-g(x)=|x+1|-|a-x|$

$\leqslant|(x+1)+(a-x)|$(当且仅当 $x+1$ 和 $a-x$ 异号时等号成立)

即 $[f(x)-g(x)]_{\max}=|a+1|$, …………………………………………………………………………… 7 分

若 $f(x)-g(x)\leqslant 2$ 恒成立,只需 $|a+1|\leqslant 2$, ………………………………………………………… 8 分

解得 $-3\leqslant a\leqslant 1$,

所以实数 a 的取值范围为 $[-3,1]$. ………………………………………………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。