

2023 年高三 2 月大联考（新高考卷）（新教材）

数学·全解全析及评分标准

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	A	D	D	B	A	A	B	AB	AC	ACD	AC

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1. C 【解析】由 $(1-2i)z=3-4i$ ，得 $z=\frac{3-4i}{1-2i}=\frac{5}{1-2i}=1+2i$ ，所以 $\bar{z}=1-2i$ ，故选 C。

2. A 【解析】由 $2^x > 1$ ，得 $x > 0$ ，所以集合 $A=\{x|x > 0\}$ 。由 $x^2-x-2 < 0$ ，得 $(x+1)(x-2) < 0$ ，即 $-1 < x < 2$ ，所以集合 $B=\{x|-1 < x < 2\}$ ，则 $A \cap B=\{x|0 < x < 2\}$ ，故选 A。来源：高三答案公众号

3. D 【解析】设 $a+b$ 与 a 的夹角为 θ ，由已知得， $a+b=(-3,1)$ ，所以 $(a+b) \cdot a = -5$ ，又 $|a|=\sqrt{5}$ ， $|a+b|=\sqrt{10}$ ，所以 $\cos \theta = \frac{-5}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，所以 $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ，故选 D。

4. D 【解析】对于 A，函数 $y=\tan x$ 是奇函数，但在 $(0,+\infty)$ 上不是单调函数，故 A 错误。

对于 B，因为函数 $y=\ln(1+x)-\ln(1-x)$ 的定义域为 $(-1,1)$ ，所以不符合题意，故 B 错误。

对于 C，令 $g(x)=\frac{x^2+1}{x^3}$ ，则 $g(x)$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$ ，且 $g(-x)=\frac{(-x)^2+1}{(-x)^3}=-\frac{x^2+1}{x^3}=-g(x)$ ，所以 $g(x)$ 是奇函数。对 $g(x)$ 求导，得 $g'(x)=\frac{-x^2-3}{x^4} < 0$ ，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 C 错误。

对于 D，令 $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$ ，则 $f(-x)=e^{-x}-e^x+2x=-f(x)$ ，所以 $y=e^x-e^{-x}-2x$ 是奇函数。因为 $y'=e^x+e^{-x}-2 \geq 0$ ，当且仅当 $x=0$ 时，取等号，所以函数 $y=e^x-e^{-x}-2x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，故 D 正确。故选 D。

5. B 【解析】根据题意， $\mu=1000$ ， $\sigma=50$ ， $P(950 \leq X \leq 1100)=P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma)=\frac{1}{2}P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma)+\frac{1}{2}P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) \approx \frac{1}{2} \times 0.6827 + \frac{1}{2} \times 0.9545 = 0.8186$ ，所以 300 天内每天包子的销量约在 950 到 1100 个的天数大约为 $300 \times 0.8186 \approx 246$ ，故选 B。

6. A 【解析】令 $n=1$ ，得 $3a_1-6=2a_1$ ，解得 $a_1=6$ 。由 $3S_n-6=2a_n$ ，得 $3S_{n+1}-6=2a_{n+1}$ ，两式相减，整理得 $a_{n+1}=-2a_n$ ，所以数列 $\{a_n\}$ 是以 6 为首项， -2 为公比的等比数列，所以 $a_n=6 \times (-2)^{n-1}$ ，所以 $S_n=\frac{6 \times [1-(-2)^n]}{1-(-2)}=2 \times [1-(-2)^n]$ ，所以 $\frac{S_n}{a_n}=\frac{2 \times (1-2^n)}{6 \times (-2)^{n-1}}=\frac{11}{16}$ ，故选 A。

7. A 【解析】设 $|MF_1|=m$ ， $|MF_2|=n$ ，椭圆 C 的半焦距为 c ，则 $m+n=2a$ ， $mn=4c^2$ ，所以 $a^2=4c^2$ 。

$-\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - mn = -\left(\frac{m-n}{2}\right)^2 = -(m-a)^2$. 因为 $a-c \leq m \leq a+c$, 所以 $a^2 - 4c^2 = (m-a)^2 \in [0, c^2]$, 即

$4c^2 \leq a^2 \leq 5c^2$, 则 $\frac{1}{5} \leq c^2 \leq \frac{1}{4}$, 所以 $\frac{\sqrt{5}}{5} \leq c \leq \frac{1}{2}$. 故选 A.

8. B 【解析】(1) 先比较 a, b :

$$\because a = 0.6e^{0.4} = e^{0.4}(1 - \ln e^{0.4}), \quad b = 2 - \ln 4 - 2(1 - \ln 2),$$

$\therefore$ 可以构造函数 $f(x) = x(1 - \ln x)$, 则 $a = f(e^{0.4})$, $b = f(2)$.

对 $f(x)$ 求导, 得 $f'(x) = 1 - \ln x$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

$$\because 1 = e^0 < e^{0.4} < e^{0.5} < 2, \therefore f(e^{0.4}) > f(2), \text{ 即 } a > b.$$

(2) 再比较 b, c :

$$\because b - c = 4 - \ln 4 - c = 4 - 2\ln 2 - c.$$

$\therefore$ 可以构造函数 $g(x) = 2x - x \ln x - c$, 则 $g'(x) = 1 - \ln x$.

当 $x \in (0, c)$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $x \in (c, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$.

$\therefore g(x)$ 在 $(0, c)$ 上单调递增, 在 $(c, +\infty)$ 上单调递减, $\therefore g(x)_{\max} = g(c) = 0$.

$\therefore g(2) < 0$, $\therefore b - c < 0$, 即 $b < c$.

(3) 最后比较 a, c :

$$\because a - c = (1 - 0.4)e^{0.4} - c + 2.$$

$\therefore$ 可以构造函数 $h(x) = (1 - x)e^x - c + 2$, 则 $h'(x) = -xe^x$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) < 0$.

$\therefore h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减.

又 $\because h(0.5) = 0.5e^{0.5} - c + 2$, 且 $e^{0.5} > 1.6$, $\therefore h(0.5) > 0$.

$\therefore h(0.4) > h(0.5) > 0$, $\therefore a - c > 0$, 即 $a > c$.

综上得, $a > c > b$, 故选 B.

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. AB 【解析】对于 A, 设甲同学的竞赛成绩为 x , 则 $\frac{1}{5} \times (80 + 84 + 86 + 90 + x) = 87$, 解得 $x = 95$, 故 A 正确.

对于 B, 这 5 名同学竞赛成绩的方差 $s^2 = \frac{1}{5} \times [(80 - 87)^2 + (84 - 87)^2 + (86 - 87)^2 + (90 - 87)^2 + \frac{(95 - 87)^2}{5}] =$

26.4, 故 B 正确.

对于 C, 因为 $5 \times 40\% = 2$, 所以这 5 名同学竞赛成绩的第 40 百分位数是 $\frac{1}{2} \times (84 + 86) = 85$, 故 C 错误.

对于 D, 竞赛成绩高于平均成绩的有 2 人, 所以从这 5 名同学中任取一人, 其竞赛成绩高于平均成绩的概率为 $P = \frac{2}{5} = 0.4$, 故 D 错误. 来源: 高三答案公众号

故选 AB.

10. AC 【解析】对于 A, 因为 $\angle BAD = 75^\circ$, 点 B 位于点 A 的南偏西 45° 的方向上,

所以 $\angle ADB = 60^\circ, \angle ADC = 120^\circ, \angle B = 45^\circ$. 又 $\angle AEC = \angle ADC = 120^\circ, CD = CE = 100\text{m}, AC = AC$,

$AE = 200\text{m}$, 在 $\triangle AEC, \triangle ADC$ 中, $AC^2 = AE^2 + CE^2 - 2AE \cdot CE \cos 120^\circ, AC^2 = CD^2 + AD^2$

$- 2AD \cdot CD \cos 120^\circ$, 所以 $AD = AE = 200\text{m}$, 故 A 正确.

对于 B, $\triangle ADC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times AD \times CD \times \sin \angle ADC = \frac{1}{2} \times 200 \times 100 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5000\sqrt{3}(\text{m}^2)$, 故 B 错误.

对于 C, 在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理, 得 $\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{AD}{\sin B}$, 解得 $AB = \frac{AD \cdot \sin \angle ADB}{\sin B} = \frac{200 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$

$100\sqrt{6}(\text{m})$, 故 C 正确.

对于 D, 过点 A 作 $AG \perp BC$ 于点 G, 易知 $\angle DAG = 30^\circ$, 所以 $\angle CAG > 30^\circ$, 故 D 错误.

故选 AC.

11. ACD 【解析】直线 $l: mx - y + m + 2 = 0$ 可化为 $y = m(x + 1) + 2$, 则直线 l 过定点 $P(1, 2)$, 故 A 正确.

由题意知圆 C 的半径 $r = 3$, $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} r^2 \sin \angle ACB = \frac{9}{2} \sin \angle ACB$, 当 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ 时, $\triangle ABC$ 的

面积取得最大值, 此时圆心 C 到直线 l 的距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 则 $\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 解得 $m = -1$ 或 $m = -\frac{1}{7}$, 故

B 错误.

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos \angle BAC = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|^2$, 当 $PC \perp l$ 时, 弦长 AB 最短, 为 4, 此时 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的最小值为

8, 故 C 正确.

当 P 不是 AB 的中点时, 设线段 AB 的中点为 Q , 由垂径定理知 $PQ \perp CQ$, 则 Q 在以 PC 为直径的圆 (除去 P 点) 上, 当 P 是 AB 中点时, Q 与 P 重合, 故 D 正确.

故选 ACD.

12. AC 【解析】易证四边形 $ABCO$ 为菱形, 所以 $BO \perp AC$

连接 PO , 因为 $PA = PD = \sqrt{2}$, 所以 $PO \perp AD$. 因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面



$ABCD = AD$, $PO \subset$ 平面 PAD , 所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 因为 $AC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PO \perp AC$, 又 $PO \cap OB = O$, 所以 $AC \perp$ 平面 POB , 又 $BP \subset$ 平面 POB , 所以 $AC \perp BP$, 故 A 正确.

易证 $\triangle AOE$ 为等腰直角三角形, $\triangle AOB$ 为等边三角形, 且平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 所以三棱锥 $B-AOE$

外接球的球心为等边三角形 AOB 的中心, 所以三棱锥 $B-AOE$ 外接球的半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以三棱锥

$B-AOE$ 外接球的体积为 $V = \frac{4}{3}\pi \times (\frac{\sqrt{3}}{3})^3 = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi$, 故 B 错误.

因为 $PD \parallel OE$, 所以 $\angle CPD$ 为异面直线 PC 与 OE 所成的角 (或其补角), 因为 $PO = \sqrt{PD^2 - OD^2} = 1$,

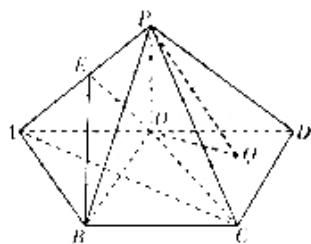
所以 $PC = \sqrt{PO^2 + OC^2} = \sqrt{2}$. 在 $\triangle PCD$ 中, 由余弦定理, 得 $\cos \angle CPD = \frac{2+2-1}{2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3}{4}$, 故 C 正确.

因为 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 OQ 为 PQ 在平面 $ABCD$ 内的射影, 若直线 PQ 与平面 $ABCD$ 所成的角为

60° , 则 $\angle PQO = 60^\circ$. 因为 $PO = 1$, 所以 $OQ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故点 Q 的轨迹为以 O 为圆心, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为半径的半圆,

所以点 Q 的轨迹长度为 $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$, 故 D 错误.

故选 AC.



三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 165 【解析】由二项式定理, 得 $(x-3)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r x^{5-r} (-3)^r$, 所以在 $(2x+1)(x-3)^5$ 的展开式中, x^4 的系数为 $2 \times C_5^1 \times (-3)^3 + C_5^0 \times (-3)^4 = 165$, 故填 165.

14. $y = \pm 2\sqrt{2}x$ 【解析】设双曲线 M 的半焦距为 c , 由双曲线的定义, 知 $\frac{|PF_1| - |PF_2|}{|F_1F_2|} = \frac{1}{3}$, 即 $\frac{2a}{2c} = \frac{1}{3}$, 所以 $\frac{c}{a} = 3$, 所以 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a} = 2\sqrt{2}$, 所以双曲线 M 的渐近线方程为 $y = \pm 2\sqrt{2}x$, 故填 $y = \pm 2\sqrt{2}x$.

15. $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ 【解析】因为 $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{6})$, 所以 $g(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$, $g(\frac{2023\pi}{2}) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $g(x) - g(\frac{2023\pi}{2}) > 0$ 可化为 $g(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$, 所以 $g(x) > \frac{\sqrt{3}}{2}$, 令 $\frac{\pi}{3} + 2k\pi < 2x - \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 得 $k\pi + \frac{\pi}{3} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. 当 $k = 0$ 时, 不等式 $g(x) - g(\frac{2023\pi}{2}) > 0$ 在区间 $[0, \pi]$ 内的解集为 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$, 故填 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$.



16. 3 【解析】因为 $f'(x) = ae^x - a$, $g'(x) = xe^x + 1$, 存在 $t > 0$, 使得 $f'(t) = g'(t)$, 所以 $a(e^t - 1) = te^t + 1$.

因为 $t > 0$, 所以 $e^t - 1 > 0$, 所以方程 $a = \frac{te^t + 1}{e^t - 1} = t + \frac{t+1}{e^t - 1}$ 有解.

令 $G(x) = x + \frac{x+1}{e^x - 1} (x > 0)$, 则 $G'(x) = 1 + \frac{e^x - 1 - (x+1)e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(e^x - x - 2)}{(e^x - 1)^2}$,

令 $h(x) = e^x - x - 2 (x > 0)$, 则 $h'(x) = e^x - 1 > 0$ 恒成立,

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

因为 $h(1) = e - 3 < 0$, $h(2) = e^2 - 4 > 0$,

所以存在唯一一个 $x_0 \in (1, 2)$, 使得 $h(x_0) = 0$,

所以当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h(x) < 0$, $G'(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h(x) > 0$, $G'(x) > 0$,

所以 $G(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $G(x)_{\min} = G(x_0) = x_0 + \frac{x_0 + 1}{e^{x_0} - 1}$. 由 $e^{x_0} - x_0 - 2 = 0$ 得 $e^{x_0} = x_0 + 2$,

所以 $G(x_0) = x_0 + \frac{x_0 + 1}{x_0 + 2 - 1} = x_0 + 1 \in (2, 3)$, 故实数 a 的最小整数值为 3. 故填 3.

【答案】3

例 14 (1) 分两种情况: $y = 2\sqrt{2}x$ 或 $y = -2\sqrt{2}x$, 不过分, 如果只写出其中一个, 不扣分.

例 15 (2) 分两种情况: $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$, 不扣分.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

【解析】(1) 因为向量 $m = (\cos A, a)$, $n = (2\cos C - 3\cos B, 3b - 2c)$, 且 $m \parallel n$,

所以 $(3b - 2c)\cos A = a(2\cos C - 3\cos B)$. (2 分)

由正弦定理, 得 $(3\sin B - 2\sin C)\cos A = \sin A(2\cos C - 3\cos B)$,

即 $3\cos A \sin B - 2\cos A \sin C = 2\sin A \cos C - 3\sin A \cos B$,

也即 $2(\sin A \cos C + \cos A \sin C) = 3(\sin A \cos B + \cos A \sin B)$, (3 分)

所以 $2\sin(A + C) = 3\sin(A + B)$,

所以 $2\sin B = 3\sin C$. (4 分)



由正弦定理, 得 $2b = 3c$, 所以 $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$. (5 分)

$$(2) \text{ 因为 } A = \frac{2\pi}{3}, \frac{b}{c} = \frac{3}{2},$$

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{3\sqrt{3}}{8}c^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 所以 $c = \frac{4}{3}, b = 2$. (7 分)

$$\text{由余弦定理得, } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 + bc = \frac{76}{9},$$

$$\text{所以 } a = \frac{2\sqrt{19}}{3}. \quad (10 \text{ 分})$$

说明:

1. (3) (1) 记号错;

$$\times \text{ 大错, 如 } \vec{m} = (\cos A, a), \quad \vec{n} = (2 \cos C - 3 \cos B, 3b - 2c) \quad [\vec{m} \perp \vec{n}];$$

$$\text{II 以 } (3b - 2c) \cos A = a(2 \cos C - 3 \cos B), \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{由余弦定理得 } (3b - 2c) \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = a(2 \cos A - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2a^2}) = 2 \cos A \frac{a^2 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}{2ac}, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\therefore (3b - 2c) \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2c(a^2 + b^2 - c^2) - 3a(a^2 + c^2 - b^2)}{2bc},$$

$$\text{即 } (3b - 2c)(b^2 + c^2 - a^2) = 2c(a^2 + b^2 - c^2) - 3a(a^2 + c^2 - b^2),$$

$$\text{即 } 3ab^2 + c^3 - a^3 + a^2 + c^2 - b^3 = 2c(a^2 + b^2 - c^2) - 3a(a^2 + c^2 - b^2), \quad (4 \text{ 分})$$

$$\therefore 3b + 2c = 2a + 2b, \quad \therefore 3c = 2b, \quad \text{即 } \frac{b}{c} = \frac{3}{2}. \quad (5 \text{ 分})$$

$$2. (3) (1) \text{ 错中, 如 } 3 \cos A \sin B = 2 \cos A \sin C = 2 \sin A \cos C + 2 \sin A \cos B \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{错中2, 错, 如 } 3 \cos A \sin B = \frac{4}{3}, \quad \text{错1分, 错求 } a = 2, \quad \text{错1分,}$$

$$\text{错中3, 错求 } a = \frac{2\sqrt{19}}{3}, \quad \text{错1分.}$$

18. (12 分)

【解析】(1) 由 $2a_1 + a_3 = 3a_2$, 得 $2 \times 2 + 2 \times q^2 = 3 \times 2q$, 解得 $q = 2$ 或 $q = 1$ (舍去), (2 分)

$$\text{所以 } a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n. \quad (3 \text{ 分})$$

$$b_n = b_3 + (n-3) \times (-1) = 5 - n. \quad (4 \text{ 分})$$



$$(2) \text{ 设 } h_k = \frac{2^n b_k}{a_k} = \frac{2^n (5-k)}{2^k} (k=1, 2, 3, \dots, n),$$

$$\text{令 } \begin{cases} \frac{2^n (5-k)}{2^k} \leq \frac{2^n (6-k)}{2^{k+1}} \\ \frac{2^n (5-k)}{2^k} \leq \frac{2^n (4-k)}{2^{k+1}} \end{cases}, \text{ 解得 } 6 \leq k \leq 7, \text{ 故当 } k=6 \text{ 或 } k=7 \text{ 时, } h_k \text{ 最小, 最小值为 } -2^{n-6},$$

$$\text{所以 } c_n = \min \left\{ \frac{2^n b_1}{a_1}, \frac{2^n b_2}{a_2}, \frac{2^n b_3}{a_3}, \dots, \frac{2^n b_n}{a_n} \right\} = -2^{n-6}, \text{ (6 分)}$$

$$\text{所以 } nc_n = -n \cdot 2^{n-6}, \text{ 所以 } S_n = -(1 \times 2^{-5} + 2 \times 2^{-4} + 3 \times 2^{-3} + \dots + n \times 2^{n-6}),$$

$$2S_n = -(1 \times 2^{-4} + 2 \times 2^{-3} + 3 \times 2^{-2} + \dots + n \times 2^{n-5}), \text{ (8 分)}$$

两式相减, 可得 来源: 高三答案公众号

$$-S_n = -(2^{-5} + 2^{-4} + 2^{-3} + \dots + 2^{n-6} - n \cdot 2^{n-5}) \text{ (9 分)}$$

$$= -\frac{2^{-5}(1-2^n)}{1-2} + n \cdot 2^{n-5}, \text{ (11 分)}$$

$$\text{所以 } S_n = (1-n) \cdot 2^{n-5} - 2^{-5} \text{ (12 分)}$$

白话:

$$\text{对于(2)问, 建立不等式组 } \begin{cases} \frac{2^n(5-k)}{2^k} \leq \frac{2^n(6-k)}{2^{k+1}} \\ \frac{2^n(5-k)}{2^k} \leq \frac{2^n(4-k)}{2^{k+1}} \end{cases}, \text{ 求该不等式组中“} 6 \leq k \leq 7 \text{”, 给个 1 分,}$$

$$\text{故 } c_n = -2^{n-6}, \text{ 给 1 分.}$$

$$S_n \text{ 求错 1 次即为“} S_n = \frac{(1-n) \cdot 2^n - 1}{32} \text{”或“} S_n = \frac{(1-n) \cdot 2}{32} = \frac{1}{32} \text{”不扣分.}$$

19. (12 分)

【解析】(1) 因为 $\overline{BB_1} = 2\overline{BM}$, 所以 M 为 BB_1 的中点, 所以 $BM = B_1M = 2$.

又三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 是直三棱柱, $B_1C_1 = BC = 2$,

所以 $\angle C_1MB_1 = \angle CMB = 45^\circ$, 所以 $\angle CMC_1 = 90^\circ$, 所以 $C_1M \perp CM$ (2 分)

因为 $CC_1 \perp AC$, $AC \perp BC$, $CC_1 \cap BC = C$, $CC_1, BC \in$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $AC \perp$ 平面 BCC_1B_1 . (3 分)

又 $C_1M \in$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $AC \perp C_1M$. 因为 $CM \cap AC = C$, $CM, AC \in$ 平面 AMC , 所以 $C_1M \perp$ 平面 AMC . 因为 $C_1M \in$ 平面 A_1MC_1 , 所以平面 $A_1MC_1 \perp$ 平面 AMC . (4 分)

(2) 过点 P 作 $PH \perp BC$ 于点 H , 可得 $PH \parallel B_1B$, 所以点 P 到平面 A_1ABB_1 的距离等于点 H 到平面 A_1ABB_1 的距离, 过点 H 作 $HQ \perp AB$ 于点 Q , 由面面垂直的性质定理可得, HQ 的长度为点 H 到平面 A_1ABB_1 的距离, 所以 $HQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为点 C 到直线 AB 的距离为 $\sqrt{2}$, 所以 H 为线段 BC 的中点, 所以 P 为线段 C_1M 的中点. (6 分)

以 C 为坐标原点, CA, CB, CC_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $C(0, 0, 0), A(2, 0, 0), M(0, 2, 2), C_1(0, 0, 4), P(0, 1, 3)$,

所以 $\overrightarrow{AP} = (-2, 1, 3), \overrightarrow{AC} = (-2, 0, 0), \overrightarrow{AM} = (-2, 2, 2)$, (7 分)

设平面 APC 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{m} = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \mathbf{m} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -2x_1 + y_1 + 3z_1 = 0 \\ -2x_1 = 0 \end{cases}, \text{ 则 } x_1 = 0, \text{ 令 } z_1 = 1, \text{ 得 } y_1 = -3.$$

所以 $\mathbf{m} = (0, -3, 1)$ 是平面 APC 的一个法向量. (8 分)

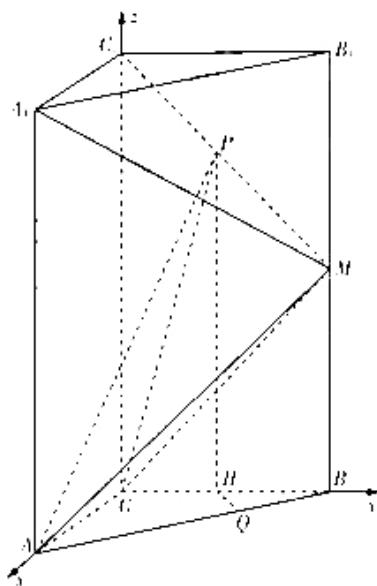
设平面 APM 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \overrightarrow{AM} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -2x_2 + y_2 + 3z_2 = 0 \\ -2x_2 + 2y_2 + 2z_2 = 0 \end{cases}, \text{ 令 } y_2 = 1, \text{ 得 } x_2 = 2, z_2 = 1.$$

所以 $\mathbf{n} = (2, 1, 1)$ 是平面 APM 的一个法向量. (9 分)

$$\text{设平面 } APC \text{ 与平面 } APM \text{ 的夹角为 } \theta, \text{ 则 } \cos \theta = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{2}{\sqrt{10} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{15}}{15}.$$

所以平面 APC 与平面 APM 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{15}$. (12 分)





说明：

1. 第(1)问另解：

因为 $\overline{BB_1} = 2\overline{BM}$ ，所以 M 为 BB_1 的中点，所以 $BM = B_1M = 2$ 。

又因为 $\angle ABC = \angle BB_1C = 45^\circ$ ，所以， $B_1C = BC = 2$ 。

所以 $\angle C_1MB_1 = \angle CMB = 45^\circ$ ，所以 $\angle MC_1C = 90^\circ$ ，所以 $CM \perp C_1M$ 。(2分)

在 $Rt\triangle B_1BM$ 中，

$$BM^2 = BB_1^2 + B_1M^2 = BC^2 + B_1C^2 - BM^2 = 2^2 + 2^2 - BM^2 = 12,$$

在 $Rt\triangle B_1C_1M$ 中， $CM^2 = C_1B_1^2 + B_1M^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ 。

连接 AC_1 ，在 $Rt\triangle ACC_1$ 中， $AC^2 = AC^2 + CC_1^2 = 2^2 + 4^2 = 20$ 。(3分)

所以 $AC_1^2 = CM^2 + AM^2$ ，所以 $C_1M \perp AM$ 。

又 $AM \perp CM$ ，平面 $AMC_1 \perp$ 平面 AMC ， $CM \cap AM = M$ ，

所以 $C_1M \perp$ 平面 AMC 。

所以 $C_1M \perp AC$ 。

因为 $C_1M \subset$ 平面 A_1MC_1 ，所以 $AC \perp$ 平面 A_1MC_1 。(4分)

2. 第(2)问另解如下，请阅卷老师注意：

过点 P 作 $PH \perp BC$ 于点 H ，所以 $PH \parallel B_1B$ ，所以点 P 到平面 A_1ABB_1 的距离等于点 H 到平面 A_1ABB_1 的距离。

所以，过点 H 作 $HQ \perp AB$ 于点 Q ，则 $HQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

因为 $\angle ABC = 45^\circ$ ，所以 $QB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，所以 $\triangle BQH$ 为等腰直角三角形 BQH ， $HB = 1$ 。

所以 H 为线段 BC 的中点，所以点 P 为线段 CC_1 的中点。(5分)

3. 7分处，由于点 P 为棱 CC_1 的中点，所以 P 为 CC_1 的中点，所以 P 为 CC_1 的中点。

4. 三个数 $m = (0, -3, 1)$ ， $n = (2, 1, 1)$ ，正角一个 $\frac{\pi}{2}$ 分。

5. $\frac{\sqrt{15}}{15}$ 写成 $\frac{1}{\sqrt{15}}$ 扣一分。

20. (12分)

【解析】(1) 由题知，随机变量 X 的可能取值为 0, 1, 2, 3, 5。

$$P(X=0) = \frac{C_4^0 \times (2+3 \times 3)}{A_5^5} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30}, \quad (2 \text{ 分})$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 \times 9}{A_5^5} = \frac{45}{120} = \frac{3}{8}, \quad (3 \text{ 分})$$



$$P(X=2) = \frac{C_3^2 \times 2}{A_5^5} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}, \quad (4 \text{ 分})$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^1 \times 1}{A_5^5} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}, \quad (5 \text{ 分})$$

$$P(X=5) = \frac{1}{A_5^5} = \frac{1}{120}, \quad (6 \text{ 分})$$

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3	5
P	$\frac{11}{30}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{120}$

(7 分)

$$\text{则 } E(X) = 0 \times \frac{11}{30} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{12} + 5 \times \frac{1}{120} = 1. \quad (8 \text{ 分})$$

(2) 设 A = “其中的 3 位专家坐错位置”, B = “恰有 2 位专家坐对位置”,

$$P(A) = 1 - P(X=3) - P(X=5) = 1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{120} = \frac{109}{120}, \quad (9 \text{ 分})$$

$$P(AB) = P(X=2) = \frac{1}{6}, \quad (10 \text{ 分})$$

$$\text{则 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{109}{120}} = \frac{20}{109}.$$

所以所求概率为 $\frac{20}{109}$. (12 分)

说明:

1. 随机变量 X 的可能取值、全部正确, 各 1 分, 共有 4 个 1 分, 5 个空, 每个空 1 分.

21. (12 分)

$$\text{【解法】(1) 由 } \begin{cases} y^2 = 2px \\ (x-4)^2 + y^2 = 12 \end{cases}, \text{ 得 } (x-4)^2 + 2px = 12, \text{ 即 } x^2 - (8-2p)x + 4 = 0. \quad (2 \text{ 分})$$

由对称性可得关于 x 的方程有两个相等的正的实数根, 所以 $\Delta = (8-2p)^2 - 16 = 0$, 且 $8-2p > 0$, 解得 $p=2$. (3 分)

所以抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$. (4 分)

(2) 如图, 由题意, 知直线 AB 的斜率不为 0, 故设直线 AB 的方程为 $x = my + 4$. (5 分)

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $P(x_3, y_3)$, $Q(x_4, y_4)$.

将直线 AB 的方程代入圆 E 的方程中, 消去 x , 得 $(m^2+1)y^2 = 12$. (6 分)



所以 $y^2 = \frac{12}{m^2+1}$, 所以 $y_2 = -y_1$, 且 $y_1^2 = y_2^2 = \frac{12}{m^2+1}$. (7分)

直线 OA 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1}x$, 代入抛物线方程 $y^2 = 4x$, 消去 x , 得

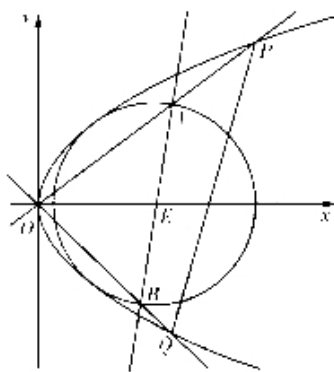
$$y^2 = \frac{4x_1}{y_1}y, \text{ 解得 } y = \frac{4x_1}{y_1} \text{ 或 } y = 0, \text{ 所以 } y_3 = \frac{4x_1}{y_1}. \text{ (8分)}$$

同理, 得 $y_4 = \frac{4x_2}{y_2}$. (9分)

所以 来源: 高三答案公众号

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S_2} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |OB| \sin \angle AOB}{\frac{1}{2} \cdot |OP| \cdot |OQ| \sin \angle POQ} = \frac{|OA| \cdot |OB|}{|OP| \cdot |OQ|} = \frac{|y_1| \cdot |y_2|}{|\frac{4x_1}{y_1}| \cdot |\frac{4x_2}{y_2}|} \\ &= \frac{(y_1 y_2)^2}{16 |x_1 x_2|} = \frac{(y_1 y_2)^2}{16 |m y_1 + 4| (m y_2 + 4)|} \\ &= \frac{(y_1 y_2)^2}{16 |m^2 y_1 y_2 + 4m(y_1 + y_2) + 16|} = \frac{(y_1 y_2)^2}{16 |m^2 y_1 y_2 + 16|} = \frac{(-\frac{12}{m^2+1})^2}{16 |m^2(-\frac{12}{m^2+1}) + 16|} \\ &= \frac{9}{4(m^2+1)(m^2+4)} = \frac{9}{4(m^2 + \frac{5}{2})^2 - 9}, \end{aligned}$$

所以当 $m=0$ 时, $\frac{S_1}{S_2}$ 取得最大值, 为 $\frac{9}{16}$. (12分)



解法2:

1. 第(1)问, 当 $p > 0$ 时, 得 $8-2p > 0$, 得 $p=2$ 或 $p=6$. (11分)

2. 第(2)问中, 7分处, “设直线 AB 的方程为 $x = my + 4$ ” (1分); “ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ” (1分); “ $P(x_3, y_3)$,”

$$Q(x_4, y_4)” (1分); “ $y_3 = \frac{4x_1}{y_1}$ ” (1分); “ $\frac{(y_1 y_2)^2}{16 |x_1 x_2|} = \frac{(y_1 y_2)^2}{16 |m y_1 + 4| (m y_2 + 4)|}$ ” (1分);$$



$$= \frac{9}{4(m^2+1)(m^2+4)} = \frac{9}{4(m^2+\frac{5}{2})^2-9} \quad \text{令 } t = \frac{m^2+5}{2},$$

22. (12 分)

【解析】(1) $\because f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = x(e^x - ax - 1)$,

$\therefore g(x) = e^x - ax - 1 (x \neq 0)$, $g(a) = e^a - a^2 - 1$. (1 分)

令 $h(x) = e^x - x^2 - 1 (x > 0)$, 则 $h'(x) = e^x - 2x$,

令 $\varphi(x) = e^x - 2x (x > 0)$, 则 $\varphi'(x) = e^x - 2$. (2 分)

由 $\varphi'(x) = 0$, 得 $x = \ln 2$,

$\therefore$ 当 $x \in (0, \ln 2)$ 时, $\varphi'(x) < 0$; 当 $x \in (\ln 2, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) > 0$,

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 上单调递减, 在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore$ 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\varphi(x) \geq \varphi(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 > 0$, 即当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$,

$\therefore h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$\because a > 0$, $\therefore h(a) > h(0) = 0$,

$\therefore$ 当 $a > 0$ 时, $g(a) > 0$ 恒成立. (4 分)

(2) 由 (1) 知, $f'(x) = x(e^x - ax - 1)$.

设 $m(x) = e^x - ax - 1 (x \in \mathbf{R})$, 则 $m'(x) = e^x - a$.

(i) 当 $a \leq 0$ 时, $m'(x) > 0$ 恒成立, $\therefore m(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

$\because m(0) = 0$,

$\therefore$ 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $m(x) < 0$, 从而 $f'(x) > 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $m(x) > 0$, 从而 $f'(x) > 0$.

又 $\because f'(0) = 0$, $\therefore \forall x \in \mathbf{R}$, 都有 $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 此时 $f(x)$ 无极值. (5 分)

(ii) 当 $a > 0$ 时, 由 $m'(x) = 0$, 得 $x = \ln a$,

$\therefore$ 当 $x \in (-\infty, \ln a)$ 时, $m'(x) < 0$; 当 $x \in (\ln a, +\infty)$ 时, $m'(x) > 0$,

$\therefore m(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore$ 当 $x = \ln a$ 时, $m(x)$ 取得最小值, 且最小值为 $m(\ln a) = a - a \ln a - 1$. (6 分)

令 $F(x) = x - x \ln x - 1 (x > 0)$, $F'(x) = -\ln x$,

$\therefore$ 当 $x \in (0, 1)$ 时, $F'(x) > 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $F'(x) < 0$,

$\therefore F(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

$\because F(1) = 0$, $\therefore$ 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $F(x) \leq 0$,

即当 $a > 0$ 时, $m(\ln a) = a - a \ln a - 1 \leq 0$ (当且仅当 $a = 1$ 时等号成立). (7 分)

(i) 当 $a = 1$ 时, $m(\ln a) = m(0) = 0$, 且当 $x \neq 0$ 时, 都有 $m(x) > 0$,

$\therefore f'(0) = 0$, 且当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值, 符合题意. (8 分)

(ii) 当 $0 < a < 1$ 时, $\ln a < 0$, 且 $m(\ln a) < 0$,

$\because m(-\frac{1}{a}) = e^{-\frac{1}{a}} > 0$, $m(0) = 0$,

$\therefore y = m(x)$ 的图象大致如图 (1).

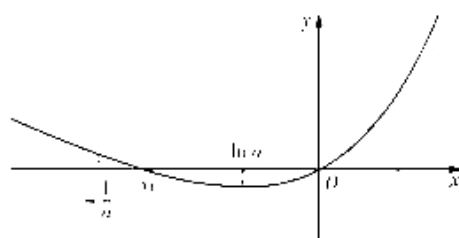


图 (1)

由函数的单调性及零点存在定理, 得在 $(-\frac{1}{a}, \ln a)$ 内存在唯一的实数 x_1 , 使得 $m(x_1) = 0$,

$\therefore$ 当 $x \in (-\infty, x_1)$ 时, $m(x) > 0$, 从而 $f'(x) < 0$;

当 $x \in (x_1, 0)$ 时, $m(x) < 0$, 从而 $f'(x) > 0$;

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $m(x) > 0$, 从而 $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 上单调递减, 在 $(x_1, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore f(x)$ 在 $x = x_1$ 处取得极小值, 符合题意. (10 分)

(iii) 当 $a > 1$ 时, $\ln a > 0$, 且 $m(\ln a) < 0$,

$\because m(0) = 0$, 由 (1) 知, $m(a) > 0$,

$\therefore y = m(x)$ 的图象大致如图 (2). 来源: 高三答案公众号

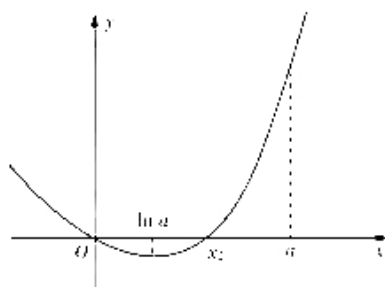


图 (2)

由函数的单调性及零点存在定理，得在 $(\ln a, a)$ 内存在唯一的实数 x_2 ，使 $m(x_2) = 0$ ，

∴ 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时， $m(x) > 0$ ，从而 $f'(x) < 0$ ；

当 $x \in (0, x_2)$ 时， $m(x) < 0$ ，从而 $f'(x) < 0$ ；

当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时， $m(x) > 0$ ，从而 $f'(x) > 0$ ，

∴ $f(x)$ 在 $(-\infty, x_2)$ 上单调递减，在 $(x_2, +\infty)$ 上单调递增，

∴ $f(x)$ 在 $x = x_2$ 处取得极小值，符合题意。

综上，当 $f(x)$ 存在极小值时， a 的取值范围为 $(0, +\infty)$ 。（12 分）

说明：

1. 第（1）问，“∴ $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增”处给 1 分；

2. 第（2）问没有作出两个函数的图像，不扣分；若只有结果：“ a 的取值范围是 $a > 0$ ”，而过程缺失，

给 1 分；在（i）（ii）（iii）这三类讨论中，若出现错误，则该类讨论不扣分。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线