# 榆林市 2022～2023 年度第四次模拟考试

# 数学试题解析(理科)

**一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1．(杨宪伟老师工作坊)集合 $P=\{-2,2\}$，集合 $Q=\{-1,0,2,3\}$，则 $P\cup Q=$(　　)

(A)$[-2,3]$　　(B)$\{-2,-1,0,2,3\}$

(C)$\{2\}$　　(D)$\{-2,-1,0,3\}$

【答案】B

【解析】因为集合 $P=\{-2,2\}$，集合 $Q=\{-1,0,2,3\}$，所以 $P\cup Q=\{-2,-1,0,2,3\}$，故选(B)．

2．(杨宪伟老师工作坊)复数 $z=(1-i)(3+i)$，则复数 $z$ 在复平面内对应的点位于(　　)

(A)第一象限　　(B)第二象限　　(C)第三象限　　(D)第四象限

【答案】D

【解析】因为 $z=(1-i)(3+i)=4-2i$，所以复数 $z$ 在复平面内对应的点位于第四象限，故选(D)．

3．(杨宪伟老师工作坊)双曲线 $\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{6}=1$ 的一条渐近线方程为(　　)

(A)$3x-4y=0$　　(B)$4x-3y=0$　　(C)$\sqrt{3}x+2y=0$　　(D)$2x-\sqrt{3}y=0$

【答案】D

【解析】令 $\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{6}=0$，可得：$2x\pm\sqrt{3}y=0$，故选(D)．

4．(杨宪伟老师工作坊)若 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{5}$，则 $\tan\alpha=$(　　)

(A)$-\frac{2}{3}$　　(B)$\frac{2}{3}$　　(C)$-\frac{1}{3}$　　(D)$\frac{1}{3}$

【答案】A

【解析】

解法 1：因为 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\dfrac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=\dfrac{1}{5}$，所以 $\tan\alpha=-\frac{2}{3}$，故选(A)．

解法 2：$\tan\alpha=\tan(\alpha+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4})=\dfrac{\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})\tan\frac{\pi}{4}}=-\dfrac{2}{3}$，故选(A)．

5．(杨宪伟老师工作坊)若函数 $f(x)=x^2-e^{-ax}(a\in\mathbf{R})$，若 $f(x)$ 的图象在 $x=0$ 处的切线与坐标轴围成的三角形的面积为 1，则 $a=$(　　)

(A)$\frac{1}{2}$　　(B)2　　(C)$\pm2$　　(D)$\pm\frac{1}{2}$

【答案】D

【解析】$f(x)=x^2-e^{-ax}$，$f'(x)=2x+ae^{-ax}$，所以 $f'(0)=a$，$f(0)=-1$，$f(x)$ 的图象在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=ax-1$，所以该切线与坐标轴围成三角形的面积 $\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{|a|}=1$，解得：$a=\pm\frac{1}{2}$，故选(D).

6．(杨宪伟老师工作坊)将函数 $y=\cos2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{20}$ 个单位长度，再把所得图象各点的横坐标缩小到原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变)，所得图象的一条对称轴为 $x=$(　　)

(A)$\frac{\pi}{80}$　　(B)$\frac{\pi}{60}$　　(C)$\frac{\pi}{40}$　　(D)$\frac{\pi}{20}$

【答案】C

【解析】

解法 1：将函数 $y=\cos2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{20}$ 个单位长度，得到的是函数 $y=\cos2(x-\frac{\pi}{20})=\cos(2x-\frac{\pi}{10})$，再把所得图象各点的横坐标缩小到原来的 $\frac{1}{2}$，得到的是函数 $y=\cos(4x-\frac{\pi}{10})$，令 $4x-\frac{\pi}{10}=k\pi(k\in Z)$，解得：$x=\frac{\pi}{40}+\frac{k\pi}{4}(k\in Z)$，故选(C).

解法 2：函数 $y=\cos2x$ 的一条对称轴为 $x=0$，将其向右平移 $\frac{\pi}{20}$ 个单位长度，再将横坐标缩小到原来的 $\frac{1}{2}$，可得：$x=\frac{\pi}{40}$，故选(C).

7．(杨宪伟老师工作坊)已知 $a=\log_3\sqrt{2}$，$b=0.3^{0.5}$，$c=0.5^{-0.4}$，则(　　)

(A)$c<b<a$　　(B)$c<a<b$　　(C)$a<b<c$　　(D)$b<c<a$

【答案】C

【解析】因为 $a=\log_3\sqrt{2}\in(0，0.5)$，$b=0.3^{0.5}\in(0.5，1)$，$c=0.5^{-0.4}\in(1，2)$，所以 $a<b<c$，故选(C).

8．(杨宪伟老师工作坊)$(5x^2+\frac{8}{x})^9$ 的展开式中含 $x^3$ 项的系数为(　　)

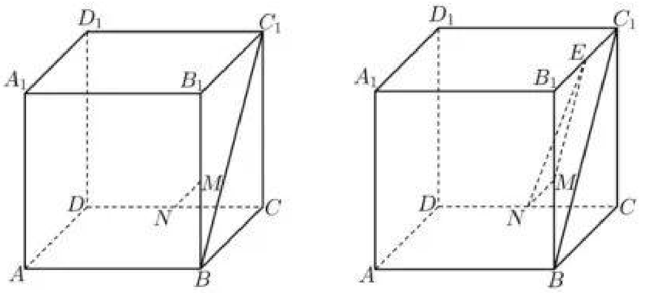
(A)$C_9^6\cdot5^3\cdot8^6$　　(B)$C_9^5\cdot5^4\cdot8^5$　　(C)$C_9^7\cdot5^2\cdot8^7$　　(D)$C_9^4\cdot5^5\cdot8^4$

【答案】B

【解析】$(5x^2+\frac{8}{x})^9$ 的展开式中含 $x^3$ 项为 $C_9^5(5x^2)^4(\frac{8}{x})^5=C_9^5\cdot5^4\cdot8^5x^3$，故选(B).

9．(杨宪伟老师工作坊)如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$M$，$N$ 分别为 $BB_1$，$CD$ 的中点，则异面直线 $MN$ 与 $BC_1$ 所成角的余弦值为(　　)

(A)$\frac{\sqrt{3}}{6}$　　(B)$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　(C)$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(D)$\frac{\sqrt{3}}{2}$



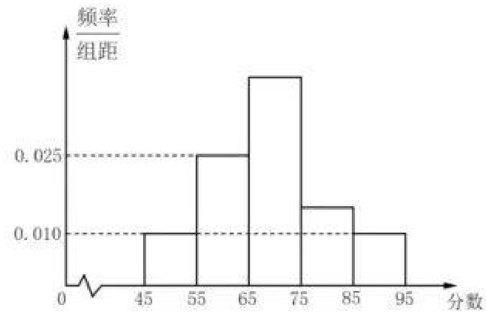

【答案】A

【解析】取 $B_1C_1$ 的中点 $E$，连结 $ME$，$EN$，则平面 $ME$∥$CC_1$，所以∠$EMN$ 即为异面直线 $MN$ 与 $BC_1$ 所成角，在△$EMN$ 中，$M\quad N=EN=\sqrt{6}$，$ME=\sqrt{2}$，$\cos\angle EMN=\frac{ME}{2MN}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，故选(A).

10．(杨宪伟老师工作坊)某学校举行了一次航天知识竞赛活动，经过班级初选后一共 100 名学生参加学校决赛，把他们的成绩(满分 100 分)分成[45，55)，[55，65)，[65，75)，[75，85)，[85，95]共五组，并得到如图所示的频率分布直方图，其中第三组的频数为 40．分析样本数据后，发现学生的竞赛分数 $X$ 近似服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中$\mu$近似为样本平均数，$\sigma^2$近似为样本方差．若某学生的成绩高于 79.9 即给该学生颁发优胜奖杯，则估计此次竞赛获得优秀奖杯的人数为(结果根据四舍五入保留到整数位)(　　)

参考数据：随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)\approx0.6827$，$P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)\approx0.9545$，$\sqrt{119}\approx10.9$．

(A)15　　(B)16　　(C)34　　(D)35




【答案】B

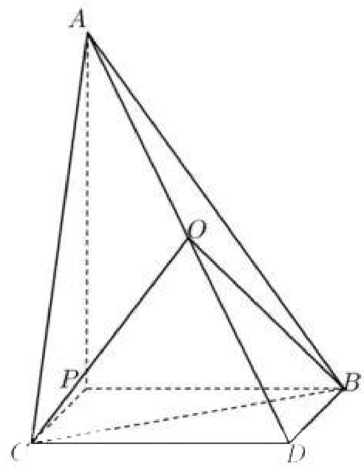
【解析】由题意：第三组的频率为 0.4，第四组的频率为 0.15，所以$\mu=50\times0.1+60\times0.25+70\times0.4+80\times0.15+90\times0.1=69$；$\sigma^2=(50-69)^2\times0.1+(60-69)^2\times0.25+(70-69)^2\times0.4+(80-69)^2\times0.15+(90-69)^2\times0.1=119$，$\sigma\approx10.9$，$P(X>79.9)=\frac{1-P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)}{2}\approx0.15865$，此次竞赛获得优秀奖杯的人数为：$100\times0.15865\approx16$，故选(B).

11．(杨宪伟老师工作坊)已知球 $O$ 的内接三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 6，且 $PA$，$PB$，$PC$ 的长分别为 6，3，2，则三棱锥 $A-BOC$ 的体积为(　　)

(A)2　　(B3　　(C)4　　(D)6

【答案】B

【解析】$V_{P-ABC}=V_{C-PAB}\leqslant\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times PA\times PB\times PC=6$，所以 $PA$，$PB$，$PC$ 互相垂直，而 $O$ 为三棱锥 $P-ABC$ 的外接球球心，所以 $V_{A-BOC}=V_{O-ABC}=\frac{1}{2}V_{D-ABC}=\frac{1}{2}V_{P-ABC}=3$，故选(B).




12．(杨宪伟老师工作坊)已知函数 $f(x)$，$g(x)$的定义域均为 **R**，且 $g(x)=2f(x+1)-2$，$2f(x)+g(x-3)=2$．若 $y=f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称，且 $f(1)=3$，现有四个结论：①$g(0)=4$；②4 为 $g(x)$的周期；③$g(x)$的图象关于点(2，0)对称；④$g(3)=0$．其中结论正确的编号为(　　)

(A)②③④　　(B)①③④　　(C)①②④　　(D)①②③

【答案】C

【解析】因为 $f(x)$，$g(x)$的定义域均为 **R**，$g(x)=2f(x+1)-2$，$f(1)=3$，所以 $g(0)=2f(1)-2=4$，①正确；又因为 $2f(x)+g(x-3)=2$，所以 $2f(x+1)+g(x-2)=2$，$g(x)=-g(x-2)$，即：$g(x)=g(x-4)$，故 4 为 $g(x)$的周期，②正确；因为 $y=f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称，$2f(x)+g(x-3)=2$，所以 $g(x-3)=g(x+1)$关于直线 $x=1$ 对称，$g(x)$关于直线 $x=2$ 对称，③错误；而 $g(3)=-g(1)=g(1)$，所以 $g(3)=g(1)=0$，④正确，故选(C).

## 第Ⅱ卷

**二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**

13．(杨宪伟老师工作坊)已知向量 $\boldsymbol{a}=(3，2)$，$\boldsymbol{b}=(\lambda，-4)$，若 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则$\lambda=$___▲___.

【答案】7

【解析】因为 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，所以$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，即：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2$，$3\lambda-8=13$，$\lambda=7$.

14．(杨宪伟老师工作坊)中国象棋是中国棋文化，也是中华民族的文化瑰宝，它源远流长，趣味浓厚，基本规则简明易懂．张三和李四下棋，张三获胜的概率是$\frac{1}{3}$，和棋的概率是$\frac{1}{\ }$，则张三不输

的概率为________.

【答案】$\frac{7}{12}$

【解析】$P=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$.

15．(杨宪伟老师工作坊)已知抛物线 $C$：$y^2=4x$ 的顶点为 $O$，经过过点 $A$，且 $F$ 为抛物线 $C$ 的焦点，若$|AF|=3|OF|$，则△$OAF$ 的面积为________.

【答案】$\sqrt{2}$

【解析】设 $A(x_0，y_0)$，则$|AF|=x_0+1=3|OF|=3$，$x_0=2$，$|y_0|=2\sqrt{2}$，故△$OAF$ 的面积$=\frac{1}{2}|y_0|=\sqrt{2}$.

16．(杨宪伟老师工作坊)在△$ABC$ 中，内角 $A$，$B$，$C$ 的对边分别为 $a$，$b$，$c$，若 $a^2-b^2=3bc$，$\sin C=2\sin B$，则 $A=$___▲___.

【答案】$\frac{2\pi}{3}$

【解析】因为 $\sin C=2\sin B$，所以 $c=2b$，又因为 $a^2-b^2=3bc$，所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc-3bc}{2bc}=-\frac{1}{2}$，$A=\frac{2\pi}{3}$.

**三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．第 17 题~第 21 题为必考题，每个考题考生必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．**

(一)必考题：共 60 分．

17．(杨宪伟老师工作坊)(12 分)已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_5=7$，$a_6=\frac{13}{2}$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$.

【解析】(1)因为 $a_1+a_5=2a_3=7$，所以 $a_3=\frac{7}{2}$，而 $a_6=\frac{13}{2}$，所以$\{a_n\}$的公差 $d=\frac{a_6-a_3}{6-3}=1$，$a_n=a_3+(n-3)d=\frac{2n+1}{2}$；

(2)$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{4}{(2n+1)(2n+3)}=2(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3})$，$S_n=2(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3})=2(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3})=\frac{4n}{6n+9}$.

18．(杨宪伟老师工作坊)(12 分)推进垃圾分类处理是落实绿色发展理念的必然选择．某社区开展有关垃圾分类的知识测试．已知测试中有 $A$，$B$ 两组题，每组都有 4 道题目，甲对 $A$ 组其中 3 道题有思路，1 道题完全没有思路．有思路的题目每道题做对的概率为$\frac{2}{3}$，没有思路的题目，只好

任意猜一个答案，猜对的概率为$\frac{1}{4}$. 甲对 $B$ 组每道题做对的概率为 0.6，甲可以选择从 $A$ 组中任选 2 道题或从 $B$ 组中任选 2 道题.

(1)若甲选择从 $A$ 组中任选 2 道题，设 $X$ 表示甲答对题目的个数，求 $X$ 的分布列和期望；

(2)以答对题目数量的期望为依据，判断甲应该选择哪组题答题.

【解析】(1)记甲选择从 $A$ 组中任选 2 道题，选到的 2 道题都有思路为事件 $M$，只有 1 道题有思路为事件 $N$，则 $P(M)=\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{2}$，$P(N)=\frac{1}{2}$. $X$ 的可能取值为 0，1，2.

$P(X=0)=\frac{1}{2}\times(1-\frac{2}{3})^2+\frac{1}{2}\times(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{1}{4})=\frac{13}{72}$；

$P(X=1)=\frac{1}{2}\times C_2^1\times(1-\frac{2}{3})\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times[\frac{2}{3}\times(1-\frac{1}{4})+(1-\frac{2}{3})\times\frac{1}{4}]=\frac{37}{72}$；

$P(X=2)=\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^2+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{11}{36}$；

$X$ 的分布列为：

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{13}{72}$ | $\frac{37}{72}$ | $\frac{11}{36}$ |

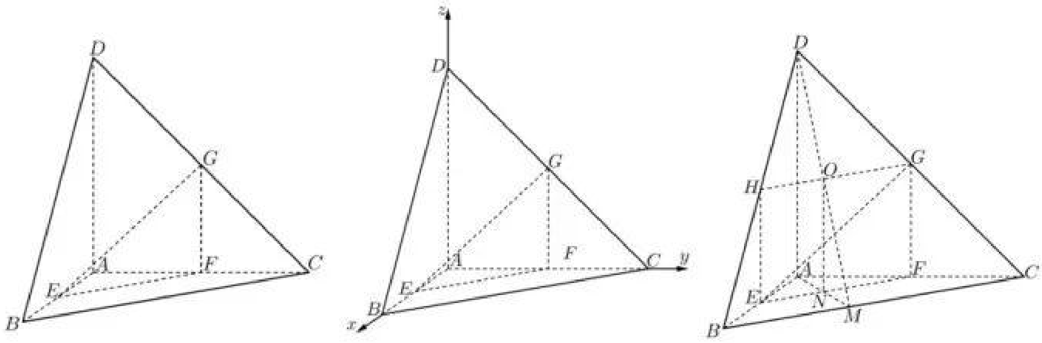
$EX=0\times\frac{13}{72}+1\times\frac{37}{72}+2\times\frac{11}{36}=\frac{9}{8}$.

(2)设甲从 $B$ 组中任选 2 道题作答，答对题目数量为 $Y$，则 $Y\sim B(2，0.6)$，$EY=2\times0.6=1.2>EX=\frac{9}{8}$，故甲应该选择 $B$ 组题答题.

19．(杨宪伟老师工作坊)(12 分)在如图所示的三棱锥 $D-ABC$ 中，已知 $AB\perp AC$，$AB\perp AD$，$AC\perp AD$，$2AB=AC=AD=4$，$E$ 为 $AB$ 的中点，$F$ 为 $AC$ 的中点，$G$ 为 $CD$ 的中点.

(1)证明：$AD//$平面 $EFG$.

(2)求平面 $BCD$ 与平面 $EFG$ 夹角的余弦值.




【解析】(1)因为 $F$ 为 $AC$ 的中点，$G$ 为 $CD$ 的中点，所以 $AD//GF$，又因为 $AD\not\subset$平面 $EFG$，$GF\subset$平面 $EFG$，所以 $AD//$平面 $EFG$；

(2)解法 1：以 $A$ 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系，则 $B(2，0，0)$，$D(0，0，4)$，$C(0， 4，0)，$\overrightarrow{BC}=(-2，4，0)$，$\overrightarrow{DC}=(0，4，-4)$，$\overrightarrow{EF}=(-1，2，0)$，$\overrightarrow{FG}=(0，0，2)$，设平面 $BCD$ 的法向量为 $\vec{n}=(x，y，z)$，由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}-x+2y=0\\ y-z=0\end{cases}$，令 $y=1$，则 $\vec{n}=(2，1，1)$，设平面 $EFG$ 的法向量为 $\vec{m}=(x_1，y_1，z_1)$，由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{FG}=0\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}-x_1+2y_1=0\\ z_1=0\end{cases}$，令 $y_1=1$，则 $\vec{m}=(2，1，0)$，$\cos<\vec{m}，\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$，故平面 $BCD$ 与平面 $EFG$ 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

**解法 2：** 取 $BD$ 的中点 $H$，连结 $EH$，$GH$，过点 $A$ 作 $AM\perp BC$ 于 $M$，交 $EF$ 于 $N$，连结 $DM$ 交 $GH$ 于 $O$，连结 $ON$，则 $H\in$ 平面 $EFG$，因为 $AB\perp AD$，$AC\perp AD$，所以 $AD\perp$ 平面 $ABC$，$AD\perp BC$，而 $AM\perp BC$，所以 $BC\perp$ 平面 $ADM$，又因为 $BC\parallel GH$，所以 $GH\perp$ 平面 $ADM$，而平面 $EFG\cap$ 平面 $BCD=GH$，所以 $\angle MON$ 平即为面 $BCD$ 与平面 $EFG$ 所成角，由(1)可得：$AD\parallel$ 平面 $EFG$，平面 $EFG\cap$ 平面 $ADM=ON$，所以 $AD\parallel ON$，$\angle MON=\angle ADM$．而 $AM=\dfrac{AB\cdot AC}{BC}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，$DM=\sqrt{AM^2+AD^2}=\dfrac{4\sqrt{30}}{5}$，$\cos\angle ADM=\dfrac{AD}{DM}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$，故平面 $BCD$ 与平面 $EFG$ 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

20．(杨宪伟老师工作坊)(12 分)已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-3ax+2a^2\ln x$，$a\neq 0$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若 $f(x)$ 有 3 个零点，求 $a$ 的取值范围.

**【解析】** (1)因为 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-3ax+2a^2\ln x$，所以 $f'(x)=\dfrac{(x-a)(x-2a)}{x}$，而 $a\neq 0$，所以当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的增区间为 $(0，a)$ 和 $(2a，+\infty)$，减区间为 $(a，2a)$；当 $a<0$ 时，$f(x)$ 的增区间为 $(0，+\infty)$，无减区间；

(2)因为 $f(x)$ 有 3 个零点，所以 $a>0$，$f(a)=2a^2(\ln a-\dfrac{5}{4})>0$，$f(2a)=2a^2(\ln 2a-2)<0$，解得：$e^{\frac{5}{4}}<a<\dfrac{e^2}{2}$，此时 $f(1)=\dfrac{1}{2}-3a<0$，$f(6a)=2a^2\ln 6a>0$，$f(x)$ 在 $(1，a)$、$(a，2a)$ 和 $(2a，6a)$ 各有 1 个零点，共有 3 个零点，满足题意，所以 $a$ 的取值范围为 $(e^{\frac{5}{4}}，\dfrac{e^2}{2})$.

21．(杨宪伟老师工作坊)(12 分)已知椭圆 $C$：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{3}{4}$，左、右焦点分别为 $F_1$，$F_2$，短轴长为 $2\sqrt{7}$.

(1)求椭圆 $C$ 的方程.

(2) $P$ 为第一象限内椭圆 $C$ 上一点，直线 $PF_1$，$PF_2$ 与直线 $x=5$ 分别交于 $A$，$B$ 两点，记 $\triangle PAB$ 和 $\triangle PF_1F_2$ 的面积分别为 $S_1$，$S_2$，若 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{9}{13}$，求 $|AB|$.

【解析】(1)因为 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{7}{a^2}=\frac{9}{16}$，所以 $a^2=16$，$b^2=7$，$C$ 的方程为：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$.

(2)$F_1(-3，0)$，$F_2(3，0)$，设 $P(x_0，y_0)(0<x_0<4$ 且 $x_0\neq3)$，$\frac{S_1}{S_2}=\frac{|PA|\cdot|PB|}{|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{5-x_0}{x_0+3}\cdot\frac{5-x_0}{|x_0-3|}=\frac{9}{13}$，当 $x_0<3$ 时，$\frac{(5-x_0)^2}{9-x_0^2}>1$ 不成立，$3<x_0<4$ 时，$\frac{(5-x_0)^2}{x_0^2-9}=\frac{9}{13}$，解得：$x_0=\frac{7}{2}$，$|y_0|=\frac{\sqrt{105}}{8}$，此时 $S_1=\frac{1}{2}|AB|(5-x_0)=\frac{3}{4}|AB|=\frac{9}{13}S_2=\frac{9}{13}\times3|y_0|$，故$|AB|=\frac{9\sqrt{105}}{26}$.

(二)选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答，并用 2B 铅笔将所选题号涂黑，多涂、错涂、漏涂均不给分，如果多做，则按所做的第一题计分．

22．(杨宪伟老师工作坊)[选修 4－4：坐标系与参数方程](10 分)

在平面直角坐标系 $xOy$ 中，直线 $l$ 的方程为 $x+y=5$，圆 $M$ 以(3，0)为圆心且与 $l$ 相切．以坐标原点为极点，$x$ 轴的正半轴为极轴建立极坐标系．

(1)求圆 $M$ 的极坐标方程；

(2)若射线$\theta=\alpha(0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\rho>0)$与圆 $M$ 交于点 $A$，$B$ 两点，且$\frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}=\frac{1}{7}$，求直线 $AB$ 的直角坐标方程．

【解析】(1)圆 $M$ 的半径 $r=\frac{|3+0-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$，设 $P(\rho，\theta)$为圆 $M$ 上的任意一点，则在$\triangle OPM$ 中，由余弦定理可得：$2=\rho^2+9-6\rho\cos\theta$，即：$\rho^2-6\rho\cos\theta+7=0$，故圆 $M$ 的极坐标方程为：$\rho^2-6\rho\cos\theta+7=0$；

(2)令$\theta=\alpha$，可得：$\rho^2-6\rho\cos\alpha+7=0$，$\frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}=\frac{|OA|+|OB|}{|OA|\cdot|OB|}=\frac{6\cos\alpha}{7}=\frac{1}{7}$，解得：$\cos\alpha=\frac{1}{6}$，而 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，故 $\tan\alpha=\sqrt{35}$，直线 $AB$ 的直角坐标方程为 $y=\sqrt{35}x$.

23．(杨宪伟老师工作坊)[选修 4－5：不等式选讲](10 分)已知函数 $f(x)=|2x-1|+|2x+2|$的最小值为 $M$.

(1)解关于 $x$ 的不等式 $f(x)<M+|2x+2|$；

(2)若正数 $a$，$b$ 满足 $a^2+2b^2=M$，求 $2a+b$ 的最大值．

【解析】(1)$f(x)=|2x-1|+|2x+2|\geq|(2x-1)-(2x+2)|=3$，当 $x=-1$ 时可取等号，故 $M=3$，不等式 $f(x)<M+|2x+2|$等价于$|2x-1|<3$，解得：$-1<x<2$，故原不等式的解集为$(-1，2)$；

(2)由柯西不等式可得：$(a^2+2b^2)[2^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2]\geq(2a+b)^2$，即：$2a+b\leq\frac{3\sqrt{6}}{2}$，当且仅当 $a=4b=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 时取等号，故 $2a+b$ 的最大值为$\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。