

江西省重点中学协作体 2023 届高三第二次联考

文科数学试卷 2023.5

命题人：上饶中学 李宝娟 鹰潭一中 罗金辉

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $M = \left\{ x \mid y = \frac{1}{\sqrt{x}} \right\}$, $N = [0, 1]$, 则 $M \cup N =$ ()

- A. $[0, +\infty)$ B. $[0, 1]$ C. $(0, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

2. 已知 i 为虚部单位，复数 $z = \frac{a^2 + i}{1 - i}$ ($a \in \mathbb{R}$) 为纯虚数，则 \bar{z} 的虚部为 ()

- A. i B. 1 C. $-i$ D. -1

3. 有道是：“上饶是个好地方，三清水秀好风光。”现有甲、乙两位游客慕名来到上饶旅游，分别准备从三清山、婺源、葛仙山三个著名景点中随机选一个景点游玩，则甲、乙至少一人选择三清山的概率是 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{9}$

4. 已知 \vec{a}, \vec{b} 为单位向量，且 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$ ，则 \vec{a} 与 $2\vec{b}$ 的夹角为 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和为 30， $a_1 - a_5 = 15$ ，则 $a_7 =$ ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

6. 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ，则“ $\sin \alpha = \sin \beta$ ”是“ $\alpha + \beta = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x$ ， $g(x) = ax + 2$ ，若对任意的 $x_1 \in [-1, 2]$ ，存在 $x_2 \in [-1, 2]$ ，使

$f(x_2) = g(x_1)$ ，则 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ B. $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ C. $[-1, 0]$ D. $(0, 3]$

8. 已知椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , P 为椭圆上异于长轴端点的动点, G, I 分别为 $\triangle PF_1F_2$ 的重心和内心, 则 $\overline{PI} \cdot \overline{PG} =$ ()
- A. $\frac{4}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\frac{16}{3}$
9. 已知实数 x, y 满足 $x|x| - y|y| = 1$, 则 $x - y$ 的取值范围是 ()
- A. $[-\sqrt{2}, 0)$ B. $[-2\sqrt{2}, 0)$ C. $(0, \sqrt{2}]$ D. $(0, 2\sqrt{2}]$
10. 已知三棱锥 $P-ABC$ 满足 $PA = PB = PC = BC = 2\sqrt{3}$, $\angle BAC = 60^\circ$. 则其外接球 O 的体积为 ()
- A. 36π B. 18π C. $9\sqrt{2}\pi$ D. $\frac{16}{3}\pi$
11. 函数 $f(x) = 2 - \frac{2x-5}{x-3} + \sin(1-x)\pi$ 在区间 $[-\frac{1}{2}, \frac{13}{2}]$ 上的零点设为 $x_1, x_2, x_3 \cdots x_n$, 则 $\sum_{i=1}^n x_i =$ ()
- A. 6 B. 18 C. 12 D. 16
12. 已知 $a = \frac{1}{5} \cos \frac{1}{5}, b = \frac{4}{25}, c = \sin \frac{1}{5}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()
- A. $c > a > b$ B. $b > a > c$ C. $c > b > a$ D. $a > c > b$

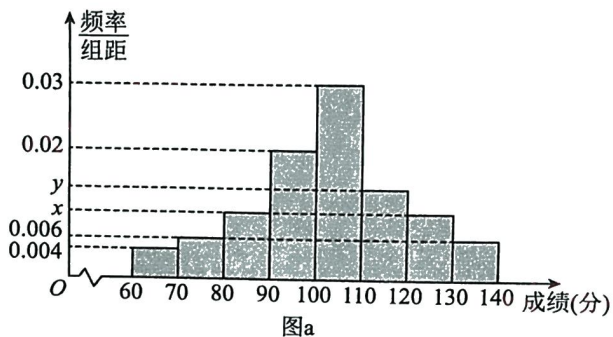
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知过原点的直线与曲线 $y = \ln x$ 相切, 则该直线的方程是_____.
14. 已知 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 则 $\cos\left(2\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) =$ _____.
15. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a^2 = b^2 + c^2 + bc$, 点 D 在线段 BC 上, 若 $\angle BAD = 30^\circ$, 且 $AD = \sqrt{3}$, 则 $b + c$ 的最小值是_____.
16. 曲线 $D: |y| = m^{x-2} + 1 (m > 0 \text{ 且 } m \neq 1)$ 过定点 P, Q , 点 P, Q 在椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上, 设椭圆 C 的左右焦点为 F_1, F_2 , 若 $|PF_1| + |QF_2| > 8$, 则该椭圆的离心率取值范围是_____.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17-21 题为必考题
每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分

17. (12 分) 上饶某中学为了解该校高三年级学生数学学习情况, 对一模考试数学成绩进行分析, 从中抽取了 50 名学生的成绩作为样本进行统计 (若该校全体学生的成绩均在 $[60, 140)$ 分), 按照 $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100)$, $[100, 110)$, $[110, 120)$, $[120, 130)$, $[130, 140)$ 的分组作出频率分布直方图如图 (a) 所示, 若用分层抽样从分数在 $[70, 90)$ 内抽取 8 人, 则抽得分数在 $[70, 80)$ 的人数为 3 人.



- (1) 求频率分布直方图中的 x , y 的值; 并估计本次考试成绩的平均数 (以每一组的中间值为估算值);
(2) 该高三数学组准备选取数学成绩在前 5% 的学生进行培优指导, 若小明此次数学分数是 132, 请你估算他能被选取吗?

18. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n + 2^n - 2$.

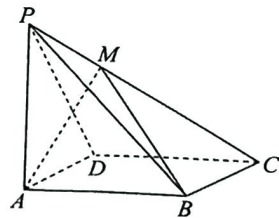
(1) 令 $b_n = a_n + 2^n - 1$, 证明: 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

19. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是菱形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAB \perp$ 平面 PBC .

(1) 证明: 四边形 $ABCD$ 是正方形;

(2) 若 $PA = AB = 3$, M 为 PC 上一点, 且满足 $PC = 3PM$, 求三棱锥 $P-ABM$ 的体积.



考
题

从
照
作
在

20. (12分) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} - x + 1$.

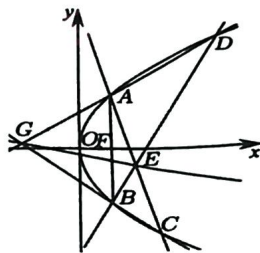
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若对于任意的 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) + \frac{1}{x} + x \leq ae^x$ 恒成立, 求实数 a 的最小值.

21. (12分) 已知抛物线 $\Gamma: y^2 = 2px (p > 0)$, O 为坐标原点, 过 $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ 作一条直线 l , 与抛物线 Γ 相交于 A, B 两点, 若线段 $|AB|$ 的最小值是 2.

(1) 求抛物线 Γ 的方程;

(2) 当直线 l 与 x 轴垂直时, 设 C, D 是抛物线 Γ 上异于 A, B 两点的两个不同的点, 直线 AC, BD 相交于点 E , 直线 AD, BC 相交于点 G , 证明: 直线 EG 恒过定点.



(二) 选考题: 共 10 分, 请考生在 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = t \\ y = -1 + \sqrt{3}t \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\sin\theta + 2\cos\theta$.

(1) 求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 设点 $P(0, -1)$, 若直线 l 与曲线 C 相交于 A, B 两点, 求 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}$ 的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |2x - 2| - |x + 1|$ 的最小值是 m .

(1) 求 m 的值;

(2) 已知 $a > 0, b > 0, c > 0$ 且 $a + b + c + m = 0$, 证明: $\frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

