2023 届高三统一考试试题
数学参考答案

1. B 【解析】本题考查集合的运算,考查运算求解能力.

解不等式$\frac{3-x}{x}\geqslant 2$,得 $0<x\leqslant 1$,所以 $A=\{x|0<x\leqslant 1\}$,则 $\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|x\leqslant 0$ 或 $x>1\}$.

2. A 【解析】本题考查复数的运算,考查运算求解能力.

由题可知 $z_1=2-\mathrm{i}$,$z_2=5\mathrm{i}$,则 $z=\frac{5\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{(2+\mathrm{i})\cdot 5\mathrm{i}}{5}=-1+2\mathrm{i}$,复数$\frac{z_2}{z_1}$的虚部为 2.

3. A 【解析】本题考查函数的图象,考查直观想象和逻辑推理的核心素养.

因为 $f(-x)=\frac{2+\cos(-2x)}{\sin(-x)}=-\frac{2+\cos 2x}{\sin x}=-f(x)$,所以 $f(x)$为奇函数,故排除 C,D. 又 $f(\frac{\pi}{2})=1>0$,所以排除 B.

4. B 【解析】本题考查直线与抛物线的位置关系,考查分类讨论的数学思想.

因为点(1,2)在抛物线 $y^2=4x$ 上,所以有且只有一条过点(1,2)的直线与抛物线相切,此时的直线方程为 $y=x+1$. 当斜率为 0 时,直线与抛物线相交,且只有一个交点,此时的直线方程为 $y=2$,故选 B.

5. C 【解析】本题考查球的应用,考查空间想象能力.

设球 O 的半径为 R,则 $4\pi R^2=36\pi$,所以 $R=3$,$\triangle ABC$ 外接圆的半径为$\sqrt{3}$,所以点 O 到平面 ABC 的距离为 $\sqrt{3^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$,三棱锥 $O-ABC$ 的体积为$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 3^2\times\sqrt{6}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$.

6. D 【解析】本题考查指数和对数的运算,考查抽象概括能力.

由题意,$S=ab^4=\frac{3a}{4}$,即 $b^4=\frac{3}{4}$,所以 $b=\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$,

令 $ab^t=\frac{a}{3}$,即 $b^t=\frac{1}{3}$,故$(\sqrt[4]{\frac{3}{4}})^t=\frac{1}{3}$,即 $t\lg\sqrt[4]{\frac{3}{4}}=\lg\frac{1}{3}$,

可得$\frac{1}{4}t(\lg 3-2\lg 2)=-\lg 3$,即 $t=\frac{4\lg 3}{2\lg 2-\lg 3}\approx 16$.

7. C 【解析】本题考查排列组合,考查逻辑推理的核心素养.

将 5 人按 3,1,1 分成三组,且甲、乙在同一组的安排方法有 C_3^1 种,
将 5 人按 2,2,1 分成三组,且甲、乙在同一组的安排方法有 C_3^2 种,
则甲、乙两人被分在同一个足球场的安排方法种数为$(C_3^1+C_3^2)A_3^3=36$.

8. D 【解析】本题考查三角恒等变换,考查数学运算的核心素养.

由已知可得 $\cos[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]+\cos[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]+1=2\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$,

$2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)+1=0$,

$[\cos(\alpha+\beta)-1][2\cos(\alpha-\beta)-1]=0$,即 $\cos(\alpha+\beta)=1$ 或 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$.

又 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$,所以 $0<\alpha+\beta<\pi$,$-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<0$,则 $\alpha-\beta=-\frac{\pi}{3}$,所以 $\beta-\alpha=\frac{\pi}{3}$.

9. AC 【解析】本题考查三角函数的图象与性质,考查直观想象和逻辑推理的核心素养.

由题可得 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$,A 正确;因为 $f(\frac{\pi}{12})=2\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3})=-1$,所以 $f(x)$的图象不关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$对称,B 错误;因为 $f(\frac{\pi}{6})=2\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3})=0$,所以 $f(x)$的图象关于点$(\frac{\pi}{6},0)$对称,C 正确;因为 $2x-\frac{\pi}{3}\in(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$,所以函数 $f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$内不是增函数,D 错误.

10. BC 【解析】本题考查平均数与方差,考查数据处理能力.

由题意,该样本数据的平均数 $\bar{a}=\frac{10\times 9+10\times 7}{10+10}=8$,方差 $s^2=\frac{10}{20}\times[11+(9-8)^2]+\frac{10}{20}\times[8+(7-8)^2]=$

10. 5.

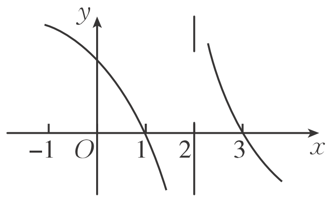
11. ABC **【解析】本题考查抽象函数的性质，考查抽象概括能力.**

令 $m=n=1$，得 $f(1)=f(1)+f(1)$，所以 $f(1)=0$，选项 A 正确.

$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则 $\frac{x_2}{x_1}>1$，$f(\frac{x_2}{x_1})<0$，$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)-f(\frac{x_2}{x_1}\times x_1)=f(x_1)-[f(\frac{x_2}{x_1})+f(x_1)]=-f(\frac{x_2}{x_1})>0$，所以 $f(x_1)>f(x_2)$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上是减函数，又 $f(x)$为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$f(-1)=0$，$f(0)=0$，所以 $f(x)$有三个零点，将 $f(x)$的图象向右平移 2 个单位长度得到 $f(x-2)$的图象，所以 $f(x-2)$有三个零点，选项 B 正确.

由于 $f(x)$为奇函数，所以 $f(x)$在$(-\infty,0)$上也是减函数，选项 C 正确.

由题意，画出 $f(x-2)$的图象，如图所示，



$xf(x-2)<0$ 等价于 $\begin{cases}x<0,\\f(x-2)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>0,\\f(x-2)<0,\end{cases}$

由图可知，不等式的解集为$\{x\,|\,x<0$ 或 $1<x<2$ 或 $x>3\}$，选项 D 不正确. 故选 ABC.

12. ACD **【解析】本题考查空间向量与立体几何，考查直观想象和逻辑推理的核心素养.**

对于 A，易证 $D_1B\perp$平面 AB_1C，所以当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$D_1M\perp$平面 AB_1C，即平面 $AD_1M\perp$平面 AB_1C，故 A 项正确；对于 B，平面 $A_1DC_1\parallel$平面 AB_1C，又因为 $E\in$平面 A_1DC_1，所以 M 与 A_1 重合，N 与 C_1 重合，此时 $\lambda=0$，$\mu=1$，不符合题意，故 B 项错误；对于 C，当 $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$ 时，$MN\perp B_1C_1$，$MN\perp A_1C$，此时 MN 最小，最小值为$\sqrt{2}$，故 C 项正确；对于 D，当 $\lambda=\frac{1}{2}$，$\mu=\frac{2}{3}$ 时，在 A_1D_1 上取靠近 D_1 点的三等分点 G，连接 GE 并延长交 AD 于点 H(图略)，易得点 H 是 AD 上靠近 A 点的三等分点，在 BC 上取靠近 B 点的三等分点 P，易知四边形 $GHPN$ 为矩形，求得面积为$\frac{4\sqrt{10}}{3}$，故 D 项正确. 故选 ACD 项.

13. 16 **【解析】本题考查平面向量的数量积公式，考查运算求解能力.**

由$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，得$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^2$，$m-6=10$，则 $m=16$.

14. $-x^2+3x-2$(答案不唯一) **【解析】本题考查不等式的应用，考查化归与转化的数学思想.**

令 $f(x)=-x^2+3x-2$，则 $f(x)\cdot\ln x=-(x-1)(x-2)\ln x>0$ 的解集为 P.

15. $\frac{\sqrt{42}}{6}$ **【解析】本题考查双曲线的综合，考查数学运算和逻辑推理的核心素养.**

易知 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{b^2}{a^2}$，所以$\frac{1}{\sqrt{13}-1}\times\frac{1}{\sqrt{4}-1}=\frac{b^2}{a^2}$，即$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{6}$，所以 C 的离心率为$\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{42}}{6}$.

16. $\frac{e^{\frac{3}{4}}}{4}$ **【解析】本题考查函数的综合应用，考查化归与转化的数学思想.**

由已知可得 $2a\sqrt{x_0}+b-e^{\frac{x_0}{2}}=0$，$x_0\in[\frac{1}{4},e]$. 不妨设直线 l：$2\sqrt{x_0}x+y-e^{\frac{x_0}{2}}=0$，则点$A(a,b)$是直线 l 上的一点，原点 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{e^{\frac{x_0}{2}}}{\sqrt{4x_0+1}}=\sqrt{\frac{e^{x_0}}{4x_0+1}}$，则$|OA|=\sqrt{a^2+b^2}\geqslant d=\sqrt{\frac{e^{x_0}}{4x_0+1}}$，设 $g(x)=\frac{e^x}{4x+1}$，$x\in[\frac{1}{4},e]$，$g'(x)=\frac{e^x(4x-3)}{(4x+1)^2}$，可得 $g(x)_{\min}=g(\frac{3}{4})=\frac{e^{\frac{3}{4}}}{4}$，所以 a^2+b^2 的最小值为$\frac{e^{\frac{3}{4}}}{4}$.

17. (1)解：因为$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\frac{a_3}{4}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=n^2+n$，

则当 $n=1$ 时，$\frac{a_1}{2}=2$，即 $a_1=4$，…………………………………………………………… 1 分

当 $n\geqslant2$ 时，$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\frac{a_3}{4}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n}=n^2-n$，…………………………………………… 2 分

上式与$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\frac{a_3}{4}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=n^2+n$相减，得$\frac{a_n}{n+1}=2n$，

所以$a_n=2n(n+1)$． …………………………………………………………………………… 4分

又$a_1=4$，满足$a_n=2n(n+1)$，所以$a_n=2n^2+2n$． ………………………………………… 5分

(2)证明：$\frac{1}{(n+2)a_n}=\frac{1}{2n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$，………………………………… 7分

所以$\frac{1}{3a_1}+\frac{1}{4a_2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)a_n}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]<\frac{1}{8}$． …………………………………… 10分

18．解：(1)设甲获得的奖金为X元，则X可能的取值为0，200，700． ………………………………… 1分

$P(X=200)=0.7\times0.5\times0.5\times0.8=0.14$，………………………………………………………… 2分

$P(X=700)=0.7\times0.5\times0.5\times0.2=0.035$，…………………………………………………… 3分

$P(X=0)=1-0.14-0.035=0.825$，…………………………………………………………………… 4分

所以$EX=0.825\times0+0.14\times200+0.035\times700=52.5$． ………………………………………… 6分

(2)由(1)可知，获得二等奖的概率为0.14，获得一等奖的概率为0.035． …………………………… 8分

设事件A：甲和乙最后所得奖金之和为900元，设事件B：甲选手获得一等奖，

则所求的概率$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.035\times0.14}{0.035\times0.14\times2}=\frac{1}{2}$． ………………………………………… 12分

19．(1)证明：由$b\cos C-\cos B=1$，可得$b\cos C-c\cos B=c$，…………………………………………… 2分

所以$\sin B\cos C-\sin C\cos B=\sin C$，……………………………………………………………… 3分

则$\sin(B-C)=\sin C$． ……………………………………………………………………………… 4分

所以$B-C=C$或$B-C+C=\pi$(舍去)，即$B=2C$． ……………………………………………………… 6分

(2)解：由$\triangle ABC$为锐角三角形，可得$\begin{cases}0<A<\frac{\pi}{2},\\0<B<\frac{\pi}{2},\\0<C<\frac{\pi}{2},\end{cases}$则$\begin{cases}0<\pi-3C<\frac{\pi}{2},\\0<2C<\frac{\pi}{2},\\0<C<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 即$\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{4}$． …………………… 9分

由正弦定理可得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，则$a=\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{\sin(B+C)}{\sin C}=\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\sin C}=3-4\sin^2C\in(1,2)$，

所以a的取值范围为$(1,2)$． ……………………………………………………………………… 12分

20．(1)证明：连接AO，因为$AB\perp AC$，O为BC的中点，所以$OA=OB=OC$． ………………………… 1分

因为$A_1B=A_1C=AA_1$，所以$\triangle A_1OA\cong\triangle A_1OB\cong\triangle A_1OC$，…… 2分

所以$\angle A_1OA=\angle A_1OB=\angle A_1OC$． ……………………………… 3分

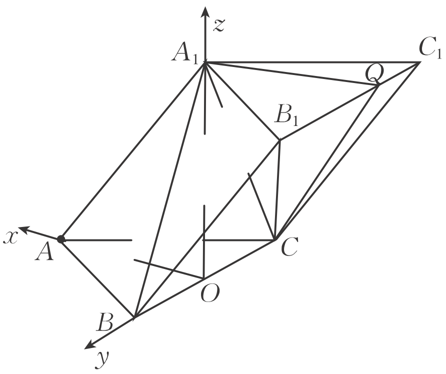
又$\angle A_1OB+\angle A_1OC=\pi$，所以$\angle A_1OB=\angle A_1OC=\frac{\pi}{2}$，即$A_1O\perp BC$，

$A_1O\perp AO$． ……………………………………………………………… 4分

因为$BC\cap AO=O$，所以$A_1O\perp$平面ABC． ………………………… 5分

(2)解：如图所示，分别以OA，OB，OA_1所在的直线为x，y，z轴建立空间直角坐标系，则$A(\sqrt{2},0,0)$，$C(0,-\sqrt{2},0)$，$A_1(0,0,\sqrt{2})$，$B(0,\sqrt{2},0)$，设$\overrightarrow{B_1Q}=\lambda\overrightarrow{B_1C_1}$，$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{A_1C}=(0,-\sqrt{2},-\sqrt{2})$，……

……………………………………………………………………… 6分



$\overrightarrow{A_1Q}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1Q}=\overrightarrow{A_1B_1}+\lambda\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{2},\sqrt{2}-2\sqrt{2}\lambda,0)$． ……………………………… 7分

设平面A_1B_1C的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，由$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0,\\-\sqrt{2}y-\sqrt{2}z=0,\end{cases}$

令$y=1$，得$x=1$，$z=-1$，即$\boldsymbol{m}=(1,1,-1)$． ………………………………………………… 8分

设平面A_1QC的法向量为$\boldsymbol{u}=(a,b,c)$，由$\begin{cases}\boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{A_1Q}=0,\\\boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}-\sqrt{2}a+(\sqrt{2}-2\sqrt{2}\lambda)b=0,\\-\sqrt{2}b-\sqrt{2}c=0,\end{cases}$

令$b=1$，得$a=1-2\lambda$，$c=-1$，即$\boldsymbol{u}=(1-2\lambda,1,-1)$． ………………………………………… 10分

$|\cos\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{m}\rangle|=|\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{m}|}|=|\frac{3-2\lambda}{\sqrt{3}\times\sqrt{(1-2\lambda)^2+2}}|=\frac{\sqrt{3}}{3}$,解得 $\lambda=\frac{3}{4}$， ………………………………… 11 分

即当$\overrightarrow{B_1Q}=\frac{3}{4}\overrightarrow{B_1C_1}$时,二面角 $Q-A_1C-B_1$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………………… 12 分

21.(1)解:由题可知 $f(1)=\frac{3}{a-1}=\frac{-3}{b}$,即 $b=1-a$. ………………………………………………………… 2 分

又 $f'(x)=\frac{3(a-x^2)+6x^2}{(a-x^2)^2}=\frac{3a+3x^2}{(a-x^2)^2}$,所以 $f'(1)=\frac{3a+3}{(a-1)^2}=-\frac{6}{b}$， ……………………………………………… 4 分

解得$\begin{cases}a=3,\\ b=-2,\end{cases}$即 $a=3,b=-2$. ……………………………………………………………………………… 5 分

(2)证明:要证 $f(x)<\tan x$,只需证 $3\sin x-3x\cos x-x^2\sin x>0$,……………………………………… 7 分

令 $g(x)=3\sin x-3x\cos x-x^2\sin x$,则 $g'(x)=3\cos x-3\cos x+3x\sin x-2x\sin x-x^2\cos x=x(\sin x-x\cos x)$, …… 8 分

令 $h(x)=\sin x-x\cos x,x\in(0,1]$,则 $h'(x)=\cos x-\cos x+x\sin x=x\sin x>0$,所以$h(x)$在$(0,1]$上单调递增,所以 $h(x)>h(0)=0$,即 $g'(x)>0$, ………………………………………………………………… 10 分

所以 $g(x)$在$(0,1]$上单调递增,则 $g(x)>g(0)=0$,即当 $x\in(0,1]$时,$f(x)<\tan x$. ………………… 12 分

22.(1)解:设 $N(x,y),M(m,n)$,则$\frac{m^2}{4}+n^2=1$, ……………………………………………………… 1 分

因为$\overrightarrow{ON}=\sqrt{3}\,\overrightarrow{OM}$,所以 $x=\sqrt{3}m,y=\sqrt{3}n$, ……………………………………………………… 2 分

所以$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$,即曲线 C_2 的方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………… 4 分

(2)证明:设 $C(x_1,y_1),D(x_2,y_2),P(x_0,y_0)$,则$\frac{x_0^2}{12}+\frac{y_0^2}{3}=1$,

由$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$,可知 A,B 分别为 PC,PD 的中点,所以 $A(\frac{x_1+x_0}{2},\frac{y_1+y_0}{2}),B(\frac{x_2+x_0}{2},\frac{y_2+y_0}{2})$, …… 5 分

则$\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}+y_1^2=1,\\ \frac{(\frac{x_1+x_0}{2})^2}{4}+(\frac{y_1+y_0}{2})^2=1,\end{cases}$作差可得$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2+\frac{x_0x_1}{2}+2y_0y_1-3=0.$

因为$\frac{x_0^2}{12}+\frac{y_0^2}{3}=1$,所以 $x_0x_1+4y_0y_1=0$, ……………………………………………………… 7 分

同理 $x_0x_2+4y_0y_2=0$, ……………………………………………………………………………………… 8 分

所以 C,D 都在直线 $x_0x+4y_0y=0$ 上. ……………………………………………………………………… 9 分

联立$\begin{cases}x_0x+4y_0y=0,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$可得 $y^2=\frac{x_0^2}{x_0^2+4y_0^2}=\frac{x_0^2}{12},x^2=4(1-\frac{x_0^2}{12})$,

即$|CD|=2\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{16-x_0^2}$,………………………………………………………………………… 10 分

点 P 到直线 CD 的距离 $d=\frac{x_0^2+4y_0^2}{\sqrt{x_0^2+16y_0^2}}=\frac{12}{\sqrt{x_0^2+16y_0^2}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{16-x_0^2}}$,………………………………… 11 分

所以$\triangle PCD$ 的面积为$\frac{1}{2}d\cdot|CD|=\frac{1}{2}\times\sqrt{16-x_0^2}\times\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{16-x_0^2}}=2\sqrt{3}$. ………………………………… 12 分