

2023 下高二数学试题答案

一、单选题：

1. D 2. B 3. A 4. B 5. C 6. D 7. C 8. A

二、多选题：

9. ABD 10. AC 11. BD 12. ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 2023 14. 20 15. 0.7 16. 4

四、解答题：

17. (1) 解：当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1}$

又因为 $3S_n^2 + (1 - 3S_n) \cdot a_n = 0$ 所以 $3S_n^2 + (1 - 3S_n) \cdot (S_n - S_{n-1}) = 0$

$$S_n - S_{n-1} + 3S_n S_{n-1} = 0 \quad \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = 3 \quad \text{又因为 } \frac{1}{S_1} = 3$$

所以数列 $\left\{ \frac{1}{S_n} \right\}$ 是以 3 为首项，3 为公差的等差数列.

$$\text{即 } \frac{1}{S_n} = 3n \Rightarrow S_n = \frac{1}{3n} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{从而当 } n \geq 2 \text{ 时, } 3S_n^2 + (1 - 3S_n) \cdot a_n = 0 \Rightarrow \frac{1}{3n^2} + \frac{n-1}{n} \cdot a_n = 0$$

$$a_n = -\frac{1}{3(n-1)n} \quad \text{显然 } n=1 \text{ 不符合上式}$$

$$\text{故数列 } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = \begin{cases} \frac{1}{3}, n=1 \\ -\frac{1}{3(n-1)n}, n \geq 2 \end{cases} \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 证明: 由 (1) 得 } S_n = \frac{1}{3n}, \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时, } \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$$

$$\begin{aligned} S_1 + \frac{1}{2} S_2 + \frac{1}{3} S_3 + \dots + \frac{1}{n} S_n &< S_1 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3n} < \frac{2}{3} \quad \text{故不等式成立.} \end{aligned}$$

$\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

18. 证明 (I) 如图, 连结 AC_1 , 交 A_1C 于点 F , 连结 DF ,

因为 D 是 AB 的中点,

所以在 $\triangle ABC_1$ 中, DF 是中位线,

所以 $DF \parallel BC_1$,

因为 $DF \subset$ 平面 A_1CD , $BC_1 \not\subset$ 平面 A_1CD ,

所以 $BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD ; 6 分

(II) 因为 $CA^2 + CB^2 = AB^2$,

所以 $\angle ACB = 90^\circ$, 即 $AC \perp BC$,

则以 C 为坐标原点, 分别以 $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CC_1}$ 为 x, y, z 轴的正方向,

建立如图所示的空间直角坐标系,

由于 $AA_1 = AC = CB = 2$,

则 $C(0, 0, 0)$, $D(1, 1, 0)$, $E(0, 2, 1)$, $A_1(2, 0, 2)$,

则 $\overrightarrow{CD} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{CE} = (0, 2, 1)$, $\overrightarrow{CA_1} = (2, 0, 2)$,

设 $\vec{m} = (x, y, z)$ 是平面 DA_1C 的一个法向量,

则, 即 $\begin{cases} x_1 + y_1 = 0 \\ 2x_1 + 2z_1 = 0 \end{cases}$,

取 $x_1 = 1$, 则 $y_1 = -1$, $z_1 = -1$, 则 $\vec{n} = (1, -1, -1)$ 8 分

同理可得平面 EA_1C 的一个法向量, 则 $\vec{n} = (2, 1, -2)$,

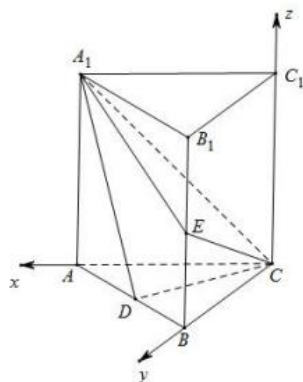
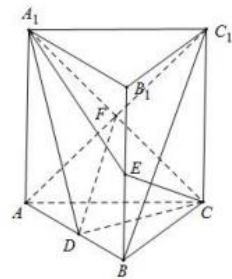
所以, $\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{1 \times 2 - 1 \times 1 + 1 \times 2}{\sqrt{1+1+1} \times \sqrt{4+1+4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $\sin \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 10 分

记二面角 $D-A_1C-E$ 的平面角为 θ , 则有 $\tan \theta = \sqrt{2}$

即二面角 $D-AC-E$ 的正切值为 $\sqrt{2}$ 12 分

19. 解: (1) 设双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

选①: 由题意可知, 双曲线 C 的两个焦点分别为 $F_1(-2, 0)$ 、 $F_2(2, 0)$,



由双曲线的定义可得 $\|PF_1\| - \|PF_2\| = 2a \Rightarrow a = 1$ 故 $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3}$

所以, 双曲线 E 的标准方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

选②: 因为圆的方程为 $(x-4)^2 + y^2 = 12$, 圆心为 $(4, 0)$, 半径为 $2\sqrt{3}$,

双曲线 E 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 由题意可得 $\frac{\frac{4b}{a}}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}} = 2\sqrt{3}$, 解得 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$,

即 $b = \sqrt{3}a$, 因为 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2a = 2$, 则 $a = 1$, $b = \sqrt{3}$,

因此, 双曲线 E 的标准方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

选③: 因为以 F_1 、 F_2 为直径的圆经过点 M , 所以 $MF_1 \perp MF_2$

由勾股定理可得 $|MF_1|^2 + |MF_2|^2 = 4c^2 = 16 \Rightarrow 4a^2 + 2|MF_1||MF_2| = 16$

所以, $|MF_1||MF_2| = 8 - 2a^2 = 2b^2$

从而 $S_{\Delta MF_1 F_2} = \frac{1}{2}|MF_1||MF_2| = b^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{2} \Rightarrow b = \sqrt{3}$

故 $a = \sqrt{c^2 - b^2} = 1$,

所以, 双曲线 E 的标准方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 6 分

(2) 假设满足条件的直线 l 存在, 设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ y_1 + y_2 = 2 \end{cases}$

由题意可得 $\begin{cases} x_1^2 - \frac{y_1^2}{3} = 1 \\ x_2^2 - \frac{y_2^2}{3} = 1 \end{cases}$, 两式作差并化简得

$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{3}$, 8 分

所以, 直线 l 的斜率为 $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 3$, 从而直线 l 的方程为 $y - 1 = 3(x - 1)$, 即 $y = 3x - 2$.

联立 $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 整理可得 $6x^2 - 12x + 7 = 0$, $\Delta = 12^2 - 4 \times 6 \times 7 < 0$, 因此, 直线 l 不存在.

..... 12 分

20.解: (1)由题意可知

$$20b=10a+0.45, (2a+b+0.065)\times 10=1,$$

解得 $a=0.005, b=0.025, \dots\dots\dots 2$ 分

所以平均值为 $50\times 0.05+60\times 0.25+70\times 0.45+80\times 0.2+90\times 0.05=69.5\dots\dots\dots 4$ 分

$$\text{中位数为 } 65+\frac{0.2}{0.45}\times 10=\frac{625}{9}\approx 69.4\dots\dots\dots 6$$
 分

(2)补全 2×2 列联表:

	男生	女生	总计
希望去张家口赛区	10	20	30
不希望去张家口赛区	40	30	70
总计	50	50	100

$\dots\dots\dots 8$ 分

零假设 H_0 : 参加张家口赛区志愿者服务的候选人与性别无关.

$$\chi^2=\frac{100\times (10\times 30-20\times 40)^2}{30\times 70\times 50\times 50}\approx 4.762>3.841\dots\dots\dots 10$$
 分

根据小概率值 $\alpha=0.050$ 的独立性检验, 我们推断 H_0 不成立, 即参加张家口赛区志愿者服务的候选人与性别有关, 此推断犯错误的概率不大于 0.050. $\dots\dots\dots 12$ 分

21. (12 分)

解 (1)①因为 $k=2$, 所以控制系统中正常工作的元件个数 X 的所有可能取值为 0,1,2,3,

因为每个元件的工作相互独立, 且正常工作的概率均为 $p=\frac{2}{3}$, 所以 $X\sim B(3, \frac{2}{3})$

$\dots\dots\dots 2$ 分

$$\text{所以 } P(X=0)=C_3^0(\frac{2}{3})^0(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{27} \quad P(X=1)=C_3^1(\frac{2}{3})^1(\frac{1}{3})^2=\frac{2}{9}$$

$$P(X=2)=C_3^2(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})^1=\frac{4}{9} \quad P(X=3)=C_3^3(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$$

所以控制系统中正常工作的元件个数 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

控制系统中正常工作的元件个数 X 的均值为

$$E(X)=3\times \frac{2}{3}=2.\dots\dots\dots 6$$
 分

②由题意知,

$$p_3 = C_5^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + C_5^4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + C_5^5 \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{80}{243} + \frac{80}{243} + \frac{32}{243} = \frac{192}{243} = \frac{64}{81}$$

(2) 升级改造后单位时间内产量的分布列为

产量	$4a$	0
设备运行概率	p_k	$1-p_k$

所以升级改造后单位时间内产量的均值为 $4ap_k$.

所以

产品类型	高端产品	一般产品
产量(单位: 件)	ap_k	$3ap_k$
利润(单位: 元)	2	1

设备升级后单位时间内的利润为 $y = 2ap_k + 3ap_k = 5ap_k$, 即 $y = 5ap_k$.

因为控制系统中元件总数为奇数, 若增加 2 个元件, 则第一类: 原系统中至少有 $k+1$ 个元件正常工作, 其概率为 $p(1) = p_k - C_{k-1}^k p^k (1-p)^{k-1}$;

第二类: 原系统中恰好有 k 个元件正常工作, 新增 2 个元件中至少有 1 个正常工作, 其概率为 $p(2) = C_{k-1}^k p^k (1-p)^{k-1} \cdot [1 - (1-p)^2] = C_{k-1}^k p^{k+1} (1-p)^{k-1} (2-p)$;

第三类: 原系统中有 $k-1$ 个元件正常工作, 新增 2 个元件全部正常工作, 其概率为 $p(3) = C_{k-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^k \cdot p^2$

$$= C_{k-1}^{k-1} p^{k+1} (1-p)^k;$$

$$\text{所以 } p_{k+1} = p_k - C_{k-1}^k p^k (1-p)^{k-1} + C_{k-1}^k p^{k+1} (1-p)^{k-1} (2-p) + C_{k-1}^{k-1} p^{k+1} (1-p)^k$$

$$= p_k + C_{k-1}^k p^k (1-p)^k (2p-1),$$

$$\text{即 } p_{k+1} - p_k = C_{k-1}^k p^k (1-p)^k (2p-1),$$

所以当 $p > \frac{1}{2}$ 时, $p_{k+1} - p_k > 0$, p_k 单调递增,

即增加元件个数设备正常工作的概率变大,

当 $p \leq \frac{1}{2}$ 时, $p_{k+1} - p_k \leq 0$,

即增加元件个数设备正常工作的概率没有变大,

又因为 $y = 5ap_k$,

所以当 $p > \frac{1}{2}$ 时, 设备可以通过增加控制系统中元件的个数来提高利润;

当 $p \leq \frac{1}{2}$ 时, 设备不可以通过增加控制系统中元件的个数来提高利润.

..... 12 分

22. (12分)

解: (1) 因为 $f(x) = e^x - 2x + 2t, x \in R$ 所以 $f'(x) = e^x - 2$ 1分

由 $e^x - 2 = 0 \Rightarrow x = \ln 2$

$f'(x) > 0 \Rightarrow x > \ln 2; f'(x) < 0 \Rightarrow x < \ln 2$ 3分

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, \ln 2)$, 单调递增区间为 $(\ln 2, +\infty)$ 5分

极小值点为 $\ln 2$, 无极大值点. 6分

(2) 令 $m(x) = e^x - x^2 + 2tx - 1$, 则 $m'(x) = e^x - 2x + 2t$ 7分

令 $g(x) = e^x - 2x + 2t$, 则 $g'(x) = e^x - 2$ 由 $e^x - 2 = 0 \Rightarrow x = \ln 2$ 8分

当 x 变化时, $g'(x), m'(x)$ 的变化如下表

x	$(0, \ln 2)$	$\ln 2$	$(\ln 2, +\infty)$
$g'(x)$	-	0	+
$m'(x)$	递减	极小值	递增

由上表可知 $m'(x) \geq m'(\ln 2)$ 而

$m'(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 \ln 2 + 2t = 2 - 2 \ln 2 + 2t = 2(1 - \ln 2 + t)$ 9分

由 $t > \ln \frac{2}{e}$, 即 $t > \ln 2 - 1$ 知 $m'(x) > 0$ 恒成立

所以 $m(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数. 10分

于是有 $m(x) > m(0)$, 而 $m(0) = e^0 - 0 + 0 - 1 = 0$,

故 $m(x) > 0$ 恒成立, 即当 $t > \ln \frac{2}{e}$ 且 $x > 0$ 时, $e^x > x^2 - 2tx + 1$ 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线