Z20 名校联盟（浙江省名校新高考研究联盟）2023 届高三第三次联考

数学参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	A	A	B	B	D	C

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

题号	9	10	11	12
答案	BC	ABC	AC	ABD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 1

14. $\frac{1}{2}$

15. 7542

16. $\left[-\frac{5}{6},-\frac{4}{5}\right)\cup\left(-\frac{2}{e},-\frac{2}{3}\right)$ （区间开闭都给分）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.

17. 解：

（1）方法 1：$\because na_{n+1}=(n+1)a_n+1$,

$\therefore \frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n(n+1)}$ …………………………… 2 分

$\therefore n\geq 2$ 时，$\frac{a_n}{n}=\frac{a_{n-1}}{n-1}+\frac{1}{n(n-1)}$，

累加得 $\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}+1-\frac{1}{n}=\frac{2n-1}{n}$，

$\therefore a_n=2n-1, n=1$ 时也成立，

$\therefore a_n=2n-1$. …………………………… 4 分

$a_n-a_{n-1}=2$,

$\therefore \{a_n\}$ 是等差数列 …………………………… 5 分

方法 2：

$\because na_{n+1}=(n+1)a_n+1, \therefore \frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n(n+1)}$，

$\therefore \frac{a_{n+1}}{n+1}+\frac{1}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n}$ …………………………… 3 分

$\therefore \left\{\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n}\right\}$ 为常数数列 $\therefore \frac{a_n}{n}+\frac{1}{n}=\frac{a_1}{1}+1=2$，

$\therefore a_n=2n-1$.

$\therefore \{a_n\}$ 是等差数列 …………………………… 5 分

方法 3：当 $n\geq 2$ 时，$(n-1)a_n=na_{n-1}+1$ ①，

$na_{n+1}=(n+1)a_n+1$ ②

$\therefore$ ②-①可得：$na_{n+1}-(n-1)a_n=(n+1)a_n-na_{n-1}$

$\therefore 2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}$ ………………………… 3分

$\therefore\{a_n\}$是等差数列，因为$a_1=1$，$a_2=3$，$\therefore a_n=2n-1$. ………………………… 5分

（2）由（1）知$S_n=n^2$，所以$b_n=(-1)^n(n+2)$，

方法1：并项求和

当n为偶数时，

$b_n+b_{n+1}=(-1)^n(n+2)+(-1)^{n+1}(n+3)=-1$， ………………………… 7分

$\therefore T_{2n-1}=b_1+(b_2+b_3)+\cdots+(b_{2n-2}+b_{2n-1})=-3+(n-1)\times(-1)=-n-2$ ………… 10分

方法2：错位相减求和

$T_{2n-1}=-3+4-5+6+\cdots\cdots+(-1)^{2n-1}(2n+1)$ ①

$(-1)T_{2n-1}=3-4+5-6+\cdots\cdots+(-1)^{2n}(2n+1)$ ② ………………………… 7分

①－②：$2T_{2n-1}=-3+1-1+1-1+\cdots\cdots+1+(-1)-(2n+1)$

$=-4-2n$

$\therefore T_{2n-1}=-n-2$ ………………………… 10分

18. 解：

（1）零假设为H_0：学生患近视与长时间使用电子产品无关.

$$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{200\times(45\times80-55\times20)^2}{100\times100\times65\times135}=\frac{5000}{351}\approx14.245>6.635$$ … 3分

根据小概率$\alpha=0.1$的χ^2独立性检验，没有充分证据推断出H_0成立，所以H_0不成立，即有99%的把握认为患近视与长时间使用电子产品的习惯有关. …………………… 4分

（2）设A＝"长时间使用电子产品的学生"，$\bar{A}$＝"非长时间使用电子产品的学生"，

B＝"任意调查一人，此人患近视"，

则$\Omega=A\cup\bar{A}$，且A，$\bar{A}$互斥，$P(A)=0.3$，$P(\bar{A})=0.7$，$P(B|A)=0.6$，$P(B)=0.46$，

………………………… 6分

根据全概率公式有

$P(B)=P(A)\cdot P(B|A)+P(\bar{A})\cdot P(B|\bar{A})=0.3\times0.6+0.7\times P(B|\bar{A})=0.46$，……………… 10分

所以$P(B|\bar{A})=0.4$ …………………………………… 12分

19. 解：

（1）$\because c\sin A=a\cos(C-\frac{\pi}{6}),\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$

$\therefore \sin C\cdot\sin A=\sin A\cdot\cos(C-\frac{\pi}{6})$

$\therefore \sin C=\cos(C-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C$ ………………………… 2分

（或者直接用诱导公式）

$\therefore \frac{1}{2}\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C$

$\therefore \tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=\sqrt{3}$

$\therefore C=\frac{\pi}{3}$ ………………………… 4 分

（2）$\because \angle AMC+\angle BMC=\pi$

$\therefore \cos\angle AMC+\cos\angle BMC=0$

$\therefore \frac{(\frac{c}{2})^2+1^2-b^2}{c}+\frac{(\frac{c}{2})^2+1^2-a^2}{c}=0$

$\therefore c^2+4=2(a^2+b^2)$ ………………………… 6 分

（或者直接用结论：平行四边形的两条对角线的平方和等于四条边的平方和）

$\because c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ $\therefore c^2=a^2+b^2-ab$

$\therefore \frac{2c^2}{c^2+4}=\frac{a^2+b^2-ab}{a^2+b^2}=1-\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}$ ………………………… 8 分

$\because \triangle ABC$为锐角三角形

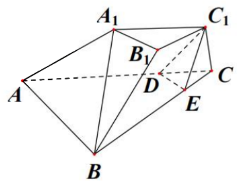
$\therefore \frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{2}$ $\therefore \tan A>\frac{1}{\sqrt{3}}$

令$t=\frac{b}{a}$ $\therefore t=\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{\sin(A+C)}{\sin A}=\frac{\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A}{\sin A}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2\tan A}\in(\frac{1}{2},2)$ ……… 10 分

$\therefore \frac{2c^2}{c^2+4}=1-\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}\in[\frac{1}{2},\frac{3}{5})$

$\therefore \frac{2\sqrt{3}}{3}\le c<\frac{2\sqrt{21}}{7}$ ………………………… 12 分

20．解：



（1）法 1：取 BC 的靠近点 C 的三等分点 E，连接 C_1E,DE,DC_1，

则 $DE//AB$，$DC_1//AA_1$

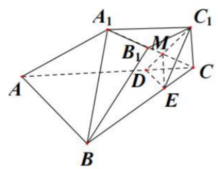
$DC_1\cap EC_1=C_1$，$AB\cap AA_1=A$

则平面 $AA_1B_1B//$平面 C_1DE，

则 $A_1B//$平面 C_1DE ………………………… 3 分

$\frac{BE}{BC}=\frac{2}{3}$ ………………………… 4 分

法 2：取 BC 的靠近点 C 的三等分点 E，连接 C_1E,DE,DC_1,A_1C，



$\because CD\underset{=}{//}\frac{1}{2}A_1C_1$

则 $CM=\frac{1}{3}CA_1$

则 $ME//A_1B$，$A_1B\not\subset$平面 C_1DE，$ME\subset$平面 C_1DE，

则 $A_1B//$平面 C_1DE ………………………… 3 分

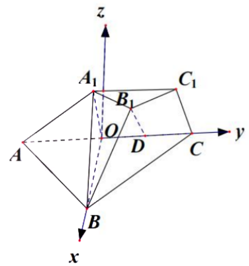
$\frac{BE}{BC}=\frac{2}{3}$ ………………………… 4 分

（2）过 A_1 作 $A_1O\perp AC$，连接 BO，由 $A_1A=AB=4$，$\angle A_1AC=\angle BAC=\frac{\pi}{3}$

得 $\triangle AA_1O\cong\triangle ABO$，则 $BO\perp AC$，因为 $d_{A_1-ABC}=3$，则 $\angle A_1OB=\frac{\pi}{3}$， ……………… 6 分

以 OB 为 x 轴，OC 为 y 轴，在平面 A_1OB 中过 O 作 OB 的垂线为 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $O(0,0,0)$，$A_1(\sqrt{3},0,3)$，$D(0,2,0)$，$A(0,-2,0)$，$B(2\sqrt{3},0,0)$， …………… 7 分



$\overrightarrow{A_1B_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\left(\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{4}{3},0\right)$，

$\overrightarrow{DB_1}=\overrightarrow{DA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=\left(\frac{7\sqrt{3}}{3},-\frac{2}{3},3\right)$， ………………… 9 分

$\overrightarrow{OA_1}=(\sqrt{3},0,3)$，$\overrightarrow{OD}=(0,2,0)$，

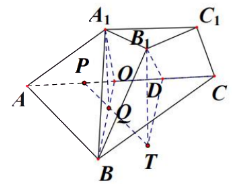
设平面平面 ACA_1C_1 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{OD}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\sqrt{3}x+3z=0\\ y=0\end{cases}$，

令 $\vec{n}=(\sqrt{3},0,-1)$， ………………………… 11 分

则 B_1D 与平面 ACA_1C_1 所成角的正弦值为

$\left|\cos\left\langle\overrightarrow{DB_1},\vec{n}\right\rangle\right|=\left|\frac{\overrightarrow{DB_1}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{DB_1}\right|\left|\vec{n}\right|}\right|=\frac{3}{58}\sqrt{58}$ ………………… 12 分



法 2.

$V_{B_1-DC_1A_1}=V_{D-B_1C_1A_1}$，$\frac{1}{3}\cdot d_{B_1-DC_1A_1}\cdot S_{\triangle DC_1A_1}=\frac{1}{3}\cdot d_{D-B_1C_1A_1}\cdot S_{\triangle B_1C_1A_1}$，

$d_{D-BC_1A_1}=d_{ABC-B_1C_1A_1}=3, S_{\triangle B_1C_1A_1}=\frac{8\sqrt{3}}{3}, S_{\triangle DC_1A_1}=4\sqrt{3}$，

则 $d_{B_1-DC_1A_1}=2$ ……6 分

取 BO 的中点 Q，过 Q 作 AB 的平行线，交 AC 于点 P，延长 PQ，使得 $QT=A_1B_1$，连接 DT，

则 A_1B_1QT 为矩形，$B_1T\perp$ 平面 ABC，且 $B_1T=A_1Q=3$， ………………………… 8 分

在 $\triangle PTD$ 中，$PT=PQ+QT=2+\frac{8}{3}=\frac{14}{3}$，

$PD=PO+OD=1+2=3$，$\angle TPD=\frac{\pi}{3}$，

则 $DT=\sqrt{PT^2+PD^2-2PT\cdot PD\cdot\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{\frac{151}{9}}$，

则 $B_1D=\sqrt{\frac{151}{9}+9}=\sqrt{\frac{232}{9}}=\frac{2\sqrt{58}}{3}$， ……………… 10 分

$\sin\theta=\frac{d_{B_1-DA_1C_1}}{B_1D}\frac{2}{\frac{2\sqrt{58}}{3}}=\frac{3\sqrt{58}}{58}$ ……………………… 12 分

其它方法酌情给分

21．解：

（1）法 1：由 $P(3,\sqrt{2})$ 可得 $l:x-\sqrt{2}y=1$，（直接写出答案给 1 分，有证明过程给 2 分）

…………………………………… 2 分

$l:x-\sqrt{2}y=1$ 交 x 轴于点 $Q(1,0)$，则

$\frac{|QF_1|}{|QF_2|}=\frac{3}{1},\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{3}{1}$，

即 $\frac{|QF_1|}{|QF_2|}=\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$，所以 l 为 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线； ……………………………………4 分

法 2：$Q(1,0)$ 到直线 $PF_1:y=\frac{\sqrt{2}}{5}(x+2),PF_2:y=\sqrt{2}(x-2)$ 的距离相等，所以得证.

（2）过 $P(x_0,y_0)$ 的切线 $l:\frac{x_0}{3}x-y_0\cdot y=1$，

当 $y_0\neq0$ 时，即 P 不为右顶点时，$k=\frac{x_0}{3y_0}$， …………………………………… 6 分

即 $k^2=\frac{x_0^{\ 2}}{9y_0^{\ 2}}=\frac{3+3y_0^{\ 2}}{9y_0^{\ 2}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3y_0^{\ 2}}>\frac{1}{3}$ …………………………………… 7 分

（或由直线与单支有两个交点，则 $|k|>|k_{渐近线}|=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 也可）

联立 $\begin{cases}l_1:y=k(x+2)\\x^2-3y^2-3=0\end{cases}\Rightarrow(1-3k^2)x^2-12k^2x-12k^2-3=0$

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{12k^2}{1-3k^2}\\x_1\cdot x_2=\frac{-12k^2-3}{1-3k^2},\\\Delta=12(k^2+1)\end{cases}$ …………………………………… 8 分

所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\frac{2\sqrt{3}(1+k^2)}{3k^2-1}=|CD|$

又，$d_{P-l_1}\cdot d_{P-l_2}=d_{F_1-l}\cdot d_{F_2-l}=\frac{\left|\frac{x_0}{3}(-2)-1\right|}{\sqrt{y_0^{\ 2}+\frac{x_0^{\ 2}}{9}}}\cdot\frac{\left|\frac{x_0}{3}\cdot2-1\right|}{\sqrt{y_0^{\ 2}+\frac{x_0^{\ 2}}{9}}}=1$ ……………………10 分

$S_{\Delta PAB}\cdot S_{\Delta PCD}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d_{P-l_1}\cdot\frac{1}{2}|CD|\cdot d_{P-l_2}=\frac{1}{4}|AB|^2\cdot 1$

所以

$$=3\frac{(k^2+1)^2}{(3k^2-1)^2}=\frac{1}{3}(1+\frac{\frac{4}{3}}{k^2-\frac{1}{3}})^2>\frac{1}{3}$$

当 $y_0\neq 0$，即点 P 为右顶点时，$S_{\Delta PAB}\cdot S_{\Delta PCD}=\frac{1}{3}$

所以，$S_{\Delta PAB}\cdot S_{\Delta PCD}$ 的最小值为 $\frac{1}{3}$. …………………………………… 12 分

22．解：

（1）$g(x)=\frac{f(x)}{x+1}=\frac{e^{ax}}{x+1}$ （$x\neq 0$），而 $g'(x)=\frac{e^{ax}[a(x+1)-1]}{(x+1)^2}$，………………… 1 分

①当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上递减，$(-1,+\infty)$ 上递减； ………………… 2 分

②当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上递减，在 $\left(-1,\frac{1}{a}-1\right)$ 上递减，在 $\left(\frac{1}{a}-1,+\infty\right)$ 上递增；

………………… 3 分

③当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在在 $\left(-\infty,\frac{1}{a}-1\right)$ 上递增，在 $\left(\frac{1}{a}-1,-1\right)$ 上递减，在 $(-1,+\infty)$ 上递减.

………………… 4 分

（求导 1 分，单调性三条各 1 分，共 4 分）

（2）由（1）得：当 $a=1$ 时，当 $x>-1,\frac{f(x)}{x+1}\geq 1$，

此时 $e^x\geq x+1$，又当 $x\leq -1,e^x>x+1$，

$\therefore e^x\geq x+1$，令 $x=\frac{1}{2n}-1$，得到 $e^{\frac{1}{2n}-1}\geq\frac{1}{2n}$，$\therefore\frac{1}{2n}<\left(\frac{1}{e}\right)^{\left(1-\frac{1}{2n}\right)}$，

$\therefore\left(\frac{1}{2n}\right)^n<\left(\frac{1}{e}\right)^{n-\frac{1}{2}}$ ………………… 6 分

$\therefore\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2n}\right)^n<\sqrt{e}\left[\left(\frac{1}{e}\right)^2+\left(\frac{1}{e}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{e}\right)^n\right]=\sqrt{e}\left(\frac{1}{e}\right)^2\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{e}}$

$<\frac{1}{\sqrt{e}(e-1)}$. ………………… 8 分

（也可以用差分，两边取对数等方法完成，酌情给分.）

（3）$\frac{2f(2m)}{f(n)}+bf(\ln n)\cdot f(m)+2\geq 0\Rightarrow 2e^{2m-n}+bne^m+2\geq 0$

①$b<0$，当 $n\to+\infty$，$m\to 0$，时，不等式显然 <0，所以此时不成立；

②$b=0$，不等式显然成立. ………………… 9 分

③$b>0$，

令 $g(n)=2e^{2m}\cdot e^{-n}+be^{m}\cdot n+2$，

$g'(n)=-2e^{2m}\cdot e^{-n}+be^{m}=0$，则 $b=2e^{m}\cdot e^{-n}\Rightarrow e^{n}=\frac{2e^{m}}{b}\Rightarrow n=\ln\frac{2e^{m}}{b}$.

所以，$g(n)_{\min}=g(\ln\frac{2e^{m}}{b})=b\cdot e^{m}+bm\cdot e^{m}-b\cdot e^{m}\ln\frac{b}{2}+2$，

令 $e^{m}=t$（$t>0$），则 $h(t)=bt+bt\ln t-bt\ln\left(\frac{b}{2}\right)+2$，

$h'(t)=b+b(1+\ln t)-b\ln\left(\frac{b}{2}\right)=0$，即 $1+1+\ln t-\ln\frac{b}{2}=0$，　…………………… 11 分

则 $t=\frac{b}{2e^{2}}$，则 $h(t)\geq\frac{b^{2}}{2e^{2}}+\frac{b}{2e^{2}}(\ln\frac{b}{2}-2)-b\ln\frac{b}{2}\cdot\frac{b}{2e^{2}}+2=-\frac{b^{2}}{2e^{2}}+2\geq 0$，

所以，$b\leq 2e$.

综上所述，$0\leq b\leq 2e$.　………………………………… 12 分