“合肥六中·天一大联考”2021年高考考前诊断暨预测卷

理科数学·答案

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	D	C	B	C	C	D	C	A	D	B

1. **答案** A

解析 由题得 $-x^2+2x+3\geqslant 0$,所以 $x^2-2x-3\leqslant 0$,所以 $(x-3)(x+1)\leqslant 0$,得 $-1\leqslant x\leqslant 3$,所以 $M=[-1,3]$. 由题得 $y=1-\sqrt{x}\leqslant 1$,所以 $N=(-\infty,1]$,得 $M\cap N=[-1,1]$. 选A.

2. **答案** B

解析 由已知 $z=1-\mathrm{i}$,则 $|z|=\sqrt{2}$,$z^2=-2\mathrm{i}$,$\bar{z}=1+\mathrm{i}$,z 的虚部为 -1,所以仅结论②正确. 选B.

3. **答案** D

解析 由题意 $\boldsymbol{b}=\pm\sqrt{2}\boldsymbol{a}$,$|\sqrt{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|2\sqrt{2}\boldsymbol{a}|=2\sqrt{2}|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{2}$ 或 $|\sqrt{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{0}|=0$,选D.

4. **答案** C

解析 $a^2+(\sqrt{a^2+b^2})^2=(a+c)^2$,$c^2+ac-a^2=0$,$e^2+e-1=0$,$e=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

因为 $\triangle ABC$ 是顶角为 $36°$ 的等腰三角形,所以 $\angle ACB=72°$,则 $\cos 72°=\cos\angle ACB=\dfrac{\frac{1}{2}BC}{AC}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$,$\sin 126°=\sin(90°+36°)=\cos 36°$,而 $\cos 72°=2\cos^2 36°-1$,所以 $\cos 36°=\sqrt{\dfrac{1+\cos 72°}{2}}=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}}=\sqrt{\dfrac{6+2\sqrt{5}}{16}}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$. 选C.

5. **答案** B

解析 每个场地由两名来自不同国家的裁判组成,只能分为:中、日;中、韩;日、韩. 三组中,中国、日本、韩国的乒乓球裁判员各两名,本国裁判可以互换,进场地全排,不同的安排方案有 $A_2^2A_2^2A_2^2A_3^3=2\times 2\times 2\times 6=48$ 种. 选B.

6. **答案** C

解析 因为 $y=x^2-1$ 与 $y=\mathrm{e}^{|x|}$ 都是偶函数,所以 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\mathrm{e}^{|x|}}$ 为偶函数,排除A,B,又由 $x\to+\infty$ 时,$f(x)\to 0$,$x\to-\infty$ 时,$f(x)\to 0$,排除D. 选C.

7. **答案** C

解析 由题意 $F_1(-\sqrt{3},0)$,$F_2(\sqrt{3},0)$,$P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},0\right)$,即 $|F_1P|=2|F_2P|$,由角平分线定理得,$|F_1G|=2|F_2G|$,又 $|F_1G|-|F_2G|=2$,故 $|F_1G|=2|F_2G|=4$,结合 $|F_1F_2|=2\sqrt{3}$ 可得 $\angle F_1GF_2=\dfrac{\pi}{3}$. 选C.

8. **答案** D

解析 因为数列 $\{a_n\}$ 是公差不为0的等差数列,前 n 项和为 S_n,对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$,都有 $S_n\geqslant S_3$,可得,首项 $a_1<$

0，公差 $d>0$，$a_3\leqslant 0$ 且 $a_4\geqslant 0$，所以 $-3d\leqslant a_1\leqslant -2d$，即 $-3\leqslant \frac{a_1}{d}\leqslant -2$. 所以$\frac{a_6}{a_5}=\frac{a_1+5d}{a_1+4d}=1+\frac{d}{a_1+4d}=1+\frac{1}{4+\frac{a_1}{d}}\in$ $\left[\frac{3}{2},2\right]$，所以$\frac{a_6}{a_5}$的值不可能为$\frac{4}{3}$. 选 D.

9. **答案** C

解析 由对数换底公式化简可得 $a-c=\log_{12}13-\log_{13}14=\frac{\lg 13}{\lg 12}-\frac{\lg 14}{\lg 13}=\frac{\lg^2 13-\lg 12\cdot\lg 14}{\lg 12\cdot\lg 13}$，由基本不等式可知 $\lg 12\cdot\lg 14<\left[\frac{1}{2}(\lg 12+\lg 14)\right]^2$，代入上式可得$\frac{\lg^2 13-\lg 12\cdot\lg 14}{\lg 12\cdot\lg 13}>\frac{\lg^2 13-\left[\frac{1}{2}(\lg 12+\lg 14)\right]^2}{\lg 12\cdot\lg 13}=$ $\frac{\lg^2 13-\left(\frac{1}{2}\lg 168\right)^2}{\lg 12\cdot\lg 13}=\frac{\left(\lg 13+\frac{1}{2}\lg 168\right)\cdot\left(\lg 13-\frac{1}{2}\lg 168\right)}{\lg 12\cdot\lg 13}=\frac{(\lg 13+\lg\sqrt{168})\cdot(\lg 13-\lg\sqrt{168})}{\lg 12\cdot\lg 13}>0$，所以 $a>c$，$b=\left(\frac{13}{12}\right)^{\frac{14}{13}}>\frac{13}{12}=\log_{12}12^{\frac{13}{12}}$，$f(x)=\frac{\ln x}{x}$在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递减，$\frac{\ln 12}{12}>\frac{\ln 13}{13}$，$13\ln 12>12\ln 13$，$12^{13}>13^{12}$，$12^{\frac{13}{12}}>13$，$\frac{13}{12}>\log_{12}13$，所以 $b>a$，综上可知 $b>a>c$. 选 C.

10. **答案** A

解析 对①，因为 $x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，所以①正确；

对②，$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$，$f'(0)=0$，$f(0)=1$，故曲线 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=1$，所以②正确；

对③，$x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$时，$f'(x)\leqslant 0$，$f(x)$ 单调递减，所以③错误；

对④，

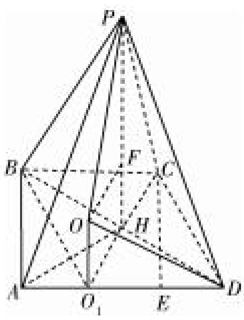
x	0	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$	$\frac{3\pi}{2}$	$\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$	2π
$f'(x)$	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$	1	↗	$\frac{\pi}{2}$	↘	$-\frac{3\pi}{2}$	↗	1

由上表作出 $x\in[0,2\pi]$时 $f(x)$ 的图象，则 $a\in\left[-\frac{3\pi}{2},1\right)\cup\left(1,\frac{\pi}{2}\right]$，所以④错误.

综上，选 A.

11. **答案** D

解析 如图，取 BD 的中点 H，所以 $\triangle PAH\cong\triangle PBH$，所以 $PH\perp AH$，又因为 $PH\perp BD$，$AH\cap BD=H$，所以 $PH\perp$平面 $ABCD$，且 $PH=\sqrt{PA^2-AH^2}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2-(2\sqrt{3})^2}=6$. 则外接球 O 的半径 R 满足 $R^2=OO_1^2+4^2=(6-OO_1)^2+O_1H^2$，设 $OO_1=x$，则 $x^2+16=(6-x)^2+4$，解得 $x=2$，从而 $R^2=x^2+4^2=20$，故三棱锥 $P-BCD$ 外接球的表面积为 $4\pi R^2=80\pi$. 选 D.



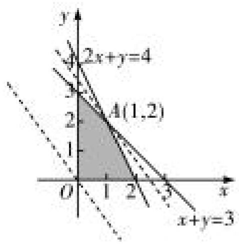
12. 答案　B

解析　由题意得 $x-m\ln x\geqslant n$ 成立，令 $f(x)=x-m\ln x$，则 $f'(x)=\frac{x-m}{x}(x>0)$，若 $m<0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\to0^+$ 时 $f(x)\to-\infty$，不合题意；若 $m>0$，当 $x\in(0,m)$ 时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(m,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 最小值为 $f(m)$. 所以 $f(m)=m-m\ln m\geqslant n$，所以 $\frac{n-2}{m}\leqslant\frac{m-m\ln m-2}{m}=1-\ln m-\frac{2}{m}(m>0)$. 令 $g(x)=1-\ln x-\frac{2}{x}(x>0)$，则 $g'(x)=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=\frac{-x+2}{x^2}(x>0)$，当 $x\in(0,2)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，所以 $g(x)\leqslant g(2)=-\ln2$，所以 $1-\ln m-\frac{2}{m}\leqslant-\ln2$，即 $\frac{n-2}{m}$ 的最大值为 $-\ln2$. 选 B.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 答案　7

解析　$\begin{cases}x\geqslant0,\\ y\geqslant0,\\ x+y\leqslant3,\\ 2x+y\leqslant4,\end{cases}$ 可以表示成图中阴影部分所示的平面区域，令 $z=3x+2y$，则 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}z$，作出直线 $y=-\frac{3}{2}x$ 并平移，数形结合知，当平移后的直线经过点 $A(1,2)$ 时，z 取得最大值，且 $z_{\max}=7$.



14. 答案　1

解析　因为只有第 4 项的二项式系数最大，所以 $n=6$，因此展开式的系数之和为 $(1-2)^6=1$.

15. 答案　12

解析　因为 $|AB|=4\left(1+\frac{1}{k_1^2}\right)$，$|DE|=4\left(1+\frac{1}{k_2^2}\right)$，$k_1^2+k_2^2=4$，所以 $|AB|+|DE|=4\left(1+\frac{1}{k_1^2}\right)+4\left(1+\frac{1}{k_2^2}\right)=8+4\left(\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}\right)=8+\left(\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}\right)(k_1^2+k_2^2)\geqslant12$，当且仅当 $k_1^2=k_2^2=2$ 时，等号成立.

16. 答案　$0<a<\sqrt{2}-1$

解析　$\cos\theta_n=\frac{\boldsymbol{a}_{n-1}\cdot\boldsymbol{a}_n}{|\boldsymbol{a}_{n-1}|\cdot|\boldsymbol{a}_n|}=\frac{(x_{n-1},y_{n-1})\cdot\left(\frac{1}{2}(x_{n-1}-y_{n-1}),\frac{1}{2}(x_{n-1}+y_{n-1})\right)}{\sqrt{x_{n-1}^2+y_{n-1}^2}\cdot\sqrt{\left[\frac{1}{2}(x_{n-1}-y_{n-1})\right]^2+\left[\frac{1}{2}(x_{n-1}+y_{n-1})\right]^2}}$

$$=\frac{\frac{1}{2}x_{n-1}^2+\frac{1}{2}y_{n-1}^2}{\sqrt{x_{n-1}^2+y_{n-1}^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}x_{n-1}^2+\frac{1}{2}y_{n-1}^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$，所以 $\theta_n=\frac{\pi}{4}$，故 $b_n=\frac{n^2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{n^2}{4}$.

$\sqrt{\frac{1}{b_{n+1}}}+\sqrt{\frac{1}{b_{n+2}}}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{b_{2n}}}=\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n+2}+\cdots+\frac{2}{2n}$，设 $f(n)=\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n+2}+\cdots+\frac{2}{2n}$，

则 $f(n+1)-f(n)=\left(\frac{2}{n+2}+\frac{2}{n+3}+\cdots+\frac{2}{2(n+1)}\right)-\left(\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n+2}+\cdots+\frac{2}{2n}\right)=\frac{2}{2n+1}-\frac{2}{2n+2}>0$，

故 $f(n)$ 单调递增，故 $f(n)_{\min}=f(1)=1$，故 $1>\frac{1}{2}\log_a(1-2a)$，所以 $\log_a(1-2a)<2,1-2a>0$，

所以 $0<a<\frac{1}{2}$，则 $1-2a>a^2$，解得 $-1-\sqrt{2}<a<-1+\sqrt{2}$.

综上所述：$0<a<\sqrt{2}-1$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **解析** （Ⅰ）因为 $a(\sqrt{3}\cos C+\sin C)=\sqrt{3}b$，所以 $\sin A(\sqrt{3}\cos C+\sin C)=\sqrt{3}\sin B$. ……………………（1 分）

即 $\sin A(\sqrt{3}\cos C+\sin C)=\sqrt{3}\sin(A+C)$，

所以 $\sqrt{3}\sin A\cos C+\sin A\sin C=\sqrt{3}\sin A\cos C+\sqrt{3}\cos A\sin C$，

得 $\sin A\sin C=\sqrt{3}\cos A\sin C$，

因为 $0<C<\pi$，所以 $\sin C>0$，得 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$. ……………………（5 分）

又因为 $0<A<\pi$，所以 $\tan A=\sqrt{3}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ……………………（6 分）

（Ⅱ）因为 $A=\frac{\pi}{3}$，所以 $B+C=\frac{2\pi}{3}$，

因为 $\cos^2 B+\cos^2 C=\frac{1+\cos 2B}{2}+\frac{1+\cos 2C}{2}=1+\frac{1}{2}\left[\cos 2B+\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2B\right)\right]=1+\frac{1}{2}\cos\left(2B+\frac{\pi}{3}\right)$.

……………………（8 分）

因为 $0<B<\frac{2\pi}{3}$，所以 $\frac{\pi}{3}<2B+\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{3}$，得 $-1\leqslant\cos\left(2B+\frac{\pi}{3}\right)<\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{1}{2}\leqslant 1+\frac{1}{2}\cos\left(2B+\frac{\pi}{3}\right)<\frac{5}{4}$. ……………………（11 分）

所以当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时，$\cos^2 B+\cos^2 C$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$. ……………………（12 分）

18. **解析** （Ⅰ）取 AB,CD 的中点 E,F，连结 PE,EF,PF，

因为 $\angle ABC=\angle BAD=90^\circ$，$AB=\frac{1}{2}AD$，

所以 EF 为直角梯形 $ABCD$ 的中位线，所以 $EF\perp AB$.

因为 $\triangle PCD$ 为等边三角形，F 为 CD 的中点，所以 $PF\perp CD$.

因为平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PCD\cap$ 平面 $ABCD=CD$，$PF\subset$ 平面 PCD，

所以 $PF\perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $AB\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PF\perp AB$，

因为 $PF\cap EF=E$，$PF\subset$ 平面 PEF，$EF\subset$ 平面 PEF，所以 $AB\perp$ 平面 PEF，

因为 $PE\subset$ 平面 PEF，所以 $AB\perp PE$，

因为 E 为 AB 的中点，所以 $PA=PB$. ……………………（5 分）

（Ⅱ）以 F 点为坐标原点，过 F 点在平面 $ABCD$ 作 y 轴垂直 EF，建立空间直角坐标系 $F-xyz$.

设 $AB=2$，由题设可得 $A(3,-1,0)$，$B(3,1,0)$，$C(1,1,0)$，$P(0,0,\sqrt{6})$，

所以 $\overrightarrow{AP}=(-3,1,\sqrt{6})$，$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{CP}=(-1,-1,\sqrt{6})$，$\overrightarrow{CB}=(-2,0,0)$，

设 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 APB 的法向量，

$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-3x_1+y_1+\sqrt{6}z_1=0,\\ 2y_1=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{6},0,3)$，……………………（8 分）

设 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 是平面 CPB 的法向量，

$\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CP}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -x_2-y_2+\sqrt{6}z_2=0, \\ -2x_2=0, \end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{6},1)$,

则 $\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{105}}{35}$, ……………………………………(11 分)

所以二面角 $A-PB-C$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{105}}{35}$. ……………………………………(12 分)

19. **解析** (Ⅰ)X 可能取值为 4、6、8、10、12. ……………………………………(1 分)

$P(X=4)=C_4^0\left(\dfrac{3}{4}\right)^0\left(\dfrac{1}{4}\right)^4=\dfrac{1}{256}$;$P(X=6)=C_4^1\left(\dfrac{3}{4}\right)^1\left(\dfrac{1}{4}\right)^3=\dfrac{3}{64}$;$P(X=8)=C_4^2\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{27}{128}$;

$P(X=10)=C_4^3\left(\dfrac{3}{4}\right)^3\left(\dfrac{1}{4}\right)^1=\dfrac{27}{64}$;$P(X=12)=C_4^4\left(\dfrac{3}{4}\right)^4\left(\dfrac{1}{4}\right)^0=\dfrac{81}{256}$.

X	4	6	8	10	12
P	$\frac{1}{256}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{27}{108}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{81}{256}$

$E(X)=4\times\dfrac{1}{256}+6\times\dfrac{3}{64}+8\times\dfrac{27}{108}+10\times\dfrac{27}{64}+12\times\dfrac{81}{256}=10$. ……………………………………(7 分)

(Ⅱ)再做 1 道题及格的概率为 $p_1=\dfrac{3}{4}$;

再做 2 道题及格的概率为 $p_2=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{9}{16}$;

再做 3 道题及格的概率为 $p_3=\left(\dfrac{3}{4}\right)^3+C_3^2\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{54}{64}=\dfrac{27}{32}$;

再做 4 道题及格的概率为 $p_3=\left(\dfrac{3}{4}\right)^4+C_4^3\left(\dfrac{3}{4}\right)^3\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{189}{256}$.

所以该学生解答 11 道题时及格的概率最大. ……………………………………(12 分)

20. **解析** (Ⅰ)因为 $f(x)=\ln x-ax-\dfrac{2}{ax}$,所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-a+\dfrac{2}{ax^2}=\dfrac{-a^2x^2+ax+2}{ax^2}=\dfrac{-a^2\left(x-\frac{2}{a}\right)\left(x+\frac{1}{a}\right)}{ax^2}$,

由 $f'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{2}{a}$ 或 $x=-\dfrac{1}{a}$. ……………………………………(2 分)

①当 $a>0$ 时,因为 $f(1)=-a-\dfrac{2}{a}<0$,不满足题意, ……………………………………(4 分)

②当 $a<0$ 时,$f(x)$ 在 $\left(0,-\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递减,在 $\left(-\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增,

于是 $f(x)_{\min}=f\left(-\dfrac{1}{a}\right)=\ln\left(-\dfrac{1}{a}\right)+1+2\geqslant 0$,解得 $-e^3\leqslant a<0$,

所以 a 的取值范围为 $-e^3\leqslant a<0$, ……………………………………(6 分)

(Ⅱ)函数 $g(x)=\ln x+x^2-ax$,定义域为 $(0,+\infty)$,$g'(x)=\dfrac{1}{x}+2x-a=\dfrac{2x^2-ax+1}{x}$,

因为 x_1,x_2 是函数 $g(x)$ 的两个极值点,所以 x_1,x_2 是方程 $2x^2-ax+1=0$ 的两个不等正根,

则有 $\Delta=a^2-8>0$,$x_1+x_2=\dfrac{a}{2}$,$x_1x_2=\dfrac{1}{2}$,

得 $a>2\sqrt{2}$,对称轴 $\dfrac{a}{4}>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,故 $x_1\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$x_2\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$. ……………………………………(8 分)

且有 $ax_1=2x_1^2+1$,$ax_2=2x_2^2+1$,

$2g(x_1)-g(x_2)=2(\ln x_1+x_1^2-ax_1)-(\ln x_2+x_2^2-ax_2)$

$=2(\ln x_1+x_1^2-2x_1^2-1)-(\ln x_2+x_2^2-2x_2^2-1)$

$=-2x_1^2+2\ln x_1-\ln x_2+x_2^2-1$

$=x_2^2-2\left(\dfrac{1}{2x_2}\right)^2+2\ln\dfrac{1}{2x_2}-\ln x_2-1$

$=x_2^2-\dfrac{1}{2x_2^2}-\dfrac{3}{2}\ln x_2^2-2\ln 2-1.$ ……………………………………………………（10 分）

令 $t=x_2^2$，则 $t\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，

$h(t)=t-\dfrac{1}{2t}-\dfrac{3}{2}\ln t-2\ln 2-1$，$h'(t)=1+\dfrac{1}{2t^2}-\dfrac{3}{2t}=\dfrac{(2t-1)(t-1)}{2t^2}$，

当 $t\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$时，$h(t)$单调递减，当 $t\in(1,+\infty)$时，$h(t)$单调递增，

所以 $h(t)_{\min}=h(1)=-\dfrac{1+4\ln 2}{2}$，

所以 $2g(x_1)-g(x_2)$的最小值为 $-\dfrac{1+4\ln 2}{2}$. ……………………………………………………（12 分）

21. **解析** （Ⅰ）记线段 F_2G 的中点为 H，由于线段 F_1F_2 的中点为 O，连接 OH，则 $OH\parallel F_1G$，$|OH|=\dfrac{1}{2}|F_1G|$，

设⊙H 的半径为 r，⊙H 与⊙O 内切于 Q，连接 HQ，

则 O,H,Q 三点共线．

于是 $|GF_1|+|GF_2|=2(|HO|+|HF_2|)=2(|HO|+|HQ|)=2|OQ|=4\sqrt{2}$. ……………………………（3 分）

又 $|F_1F_2|=4$，根据椭圆的定义可得 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$. ……………………………………………（4 分）

（Ⅱ）假设存在满足条件的直线 l，由 $A(0,2)$，$F_2(2,0)$，知直线 AF_2 斜率为 -1， ………………………（5 分）

于是由 $AF_2\perp MN$ 知直线 l 的斜率为 1，设直线 l 的方程为 $y=x+m$，

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1,\\ y=x+m,\end{cases}$消去 y 得 $3x^2+4mx+2m^2-8=0$， ……………………………………………（6 分）

设点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，根据韦达定理得 $x_1+x_2=-\dfrac{4m}{3}$，$x_1x_2=\dfrac{2m^2-8}{3}$，

由 $AM\perp NF_2$ 知$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NF_2}=0$，因为$\overrightarrow{AM}=(x_1,y_1-2)$，$\overrightarrow{NF_2}=(2-x_2,-y_2)$，

所以$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NF_2}=x_1(2-x_2)-(y_1-2)y_2=x_1(2-x_2)-(x_1+m-2)(x_2+m)$

$=-2x_1x_2+(2-m)(x_1+x_2)-m(m-2)$

$=-2\left(\dfrac{2m^2-8}{3}\right)+(2-m)\left(-\dfrac{4m}{3}\right)-m(m-2)=0$，……………………………………（10 分）

解得 $m=2$（舍）或 $m=-\dfrac{8}{3}$，

因此所求得直线 l 的方程为 $y=x-\dfrac{8}{3}$. ………………………………………………………（12 分）

22. **解析** （Ⅰ）因为点 $M\left(2,\dfrac{\pi}{2}\right)$在直角坐标系中为$(0,2)$，直线 $\theta=\dfrac{5\pi}{6}$在直角坐标系中为 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，

所以直线 l 的普通方程为 $y=\sqrt{3}x+2$，…………………………………………………………（2 分）

因为 $\rho=\dfrac{\tan\theta}{4\cos\theta}$，即 $4\rho\cos\theta=\dfrac{\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta}$，$\rho\cos\theta\neq0$，

所以曲线 C 的普通方程为 $y=4x^2(x\neq 0)$. ……………………………… (5 分)

(Ⅱ)直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}t, \\ y=2+\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), ……………………………… (6 分)

代入 $y=4x^2$ 得, $2t^2-\sqrt{3}t-4=0$, 则 $t_1+t_2=\frac{\sqrt{3}}{2}, t_1t_2=-2$, ……………………………… (7 分)

$\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{35}}{4}$. ……………………………… (10 分)

23. **解析** (Ⅰ)①当 $x\leqslant -\frac{3}{2}$ 时, $-2x+1-2x-3\leqslant 6$, 解得 $-2\leqslant x\leqslant -\frac{3}{2}$;

②当 $-\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2}$ 时, $-2x+1+2x+3\leqslant 6$, 解得 $-\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2}$;

③当 $x\geqslant \frac{1}{2}$ 时, $2x-1+2x+3\leqslant 6$, 解得 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$,

综上, 原不等式的解集为 $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 1\}$. ……………………………… (5 分)

(Ⅱ) $f(x)=|2x-1|+|2x+3|\geqslant |(2x-1)-(2x-3)|=4$,

当且仅当 $(2x-1)(2x+3)\leqslant 0$, 即 $-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}$ 时等号成立,

所以 $m=4$.

因为 $a^2+2b^2+3c^2=4$,

利用柯西不等式得 $[a^2+(\sqrt{2}b)^2+(\sqrt{3}c)^2]\cdot[1^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2]\geqslant(a+2b+3c)^2$,

所以 $a+2b+3c\leqslant 2\sqrt{6}$,

当且仅当 $a=b=c=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时, $a+2b+3c$ 的最大值为 $2\sqrt{6}$. ……………………………… (10 分)

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ＂专业、专注、有态度＂ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。