2022-2023 学年第二学期第四次阶段测试卷

高一数学答案

1.B 【解析】因为 $z=1-\mathrm{i}$，故 $\bar{z}=1+\mathrm{i}$，故 $\bar{z}(1-z)=(1+\mathrm{i})\mathrm{i}=-1+\mathrm{i}$，故选：B.

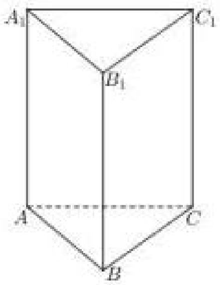
2.D 【解析】$\because \vec{a}=(1,-\sqrt{3}),\vec{b}=(2,m),\therefore \vec{a}+\vec{b}=(3,m-\sqrt{3}),\vec{a}-\vec{b}=(-1,-\sqrt{3}-m)$，

$(\vec{a}+\vec{b})//(\vec{a}-\vec{b}),3\times(-\sqrt{3}-m)=-1\times(m-\sqrt{3})$，解得 $m=-2\sqrt{3}$，故选：D.

3.B 【解析】以矩形的一条对角线为轴，旋转所得到的几何体不是圆柱，故 A 错误；
圆锥的顶点、圆锥底面圆周上任意一点及底面圆的圆心三点的连线可以构成直角三角形，B 正确；
用一平行底面的平面去截圆锥，底面与截面之间的部分叫做圆台，故 C 错误；
当球面上两点是球的直径的端点时，过这两点的大圆有无数个，D 错误.故选：B.

4.D

5.C 【解析】如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\triangle ABC$ 是锐角三角形，



对于 A，直线 AC,BC 分别为 m,l，直线 CC_1 为直线 n，满足 $m\perp n,n\perp l$，

而 m 与 l 不垂直，A 不正确；

对于 B，平面 ACC_1A_1 与平面 BCC_1B_1 分别为 α,γ，平面 ABC 为平面 β，

满足 $\alpha\perp\beta,\beta\perp\gamma$，而平面 α 与 γ 不垂直，B 不正确；

对于 C，由线面垂直的性质“垂直于同一个平面的两条直线平行”可知 C 正确；

对于 D，当 m,n 是异面直线，$m\subset\alpha,m//\beta,n\subset\beta,n//\alpha$ 时，$\alpha//\beta$，D 不正确.故选：C.

6.B 【解析】由题设 $O'C'=2\sqrt{2}$，则原四边形中 $OC=4\sqrt{2}$，又 $D'C'=DC=A'B'=AB=4$，

故平行四边形 $ABCD$ 的面积为 $S=AB\times OC=4\times4\sqrt{2}=16\sqrt{2},V=Sh=16\sqrt{2}\times2=32\sqrt{2}$.

故选：B.

7.B 【解析】因为 $a\cos B=b\sin A$，所以 $\sin A\cos B=\sin B\sin A$，由 $0<A<\pi,\sin A>0$，

所以 $\cos B=\sin B, B=\dfrac{\pi}{4}$，因为 $C=\dfrac{\pi}{6}, c=2$，所以 $b=\dfrac{c\sin B}{\sin C}=\dfrac{2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{1}{2}}=2\sqrt{2}$.故选：$B$

8.D 【解析】由余弦定理，$BC^2=1^2+\sqrt{3}^2-2\times1\times\sqrt{3}\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=7$，故 $CD=BC=\sqrt{7}$，因为

$CD\perp$ 底面 ABC，在 $Rt\triangle DCA$ 中，$AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{1+7}=2\sqrt{2}$，作 $AE\perp BC$ 于 E，因为平面 $DCB\perp$ 平面 ABC，故 $AE\perp$ 平面 BCD，故 AD 与平面 BCD 所成角为 $\angle ADE$.又

$\dfrac{1}{2}BC\cdot AE=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\dfrac{5\pi}{6}$，解得 $AE=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$，故 $\sin\angle ADE=\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{21}}{2\sqrt{2}}}{56}=\dfrac{\sqrt{42}}{56}$，故选：D.

9.ABC

10.AB 【解析】因为 $\sin B=\sin 2A$，所以 $\sin B=2\sin A\cos A, b=2a\cos A$.又 $a=1, b=\sqrt{3}$

所以 $\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{\pi}{6}, \sin B=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.又 $b>a$，

所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $B=\dfrac{2\pi}{3}$，当 $B=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$C=\dfrac{\pi}{2}, c=2$，当 $B=\dfrac{2\pi}{3}$ 时，$c=1$，故选：AB.

11.AB 【解析】对于 A，因为 $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$，所以 $\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{\sin B}{\cos B}=\dfrac{\sin C}{\cos C}$，所以 $\tan A=\tan B=\tan C$，且 $A,B,C\in(0,\pi)$，所以 $A=B=C$，所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形，故 A 正确；对于 B，$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\cos B}{b}=\dfrac{\cos C}{c}$，由正弦定理可得 $\dfrac{\sin A}{\sin A}=\dfrac{\cos B}{\sin B}=\dfrac{\cos C}{\sin C}$，则 $\dfrac{1}{\tan B}=\dfrac{1}{\tan C}=1\Rightarrow\tan B=\tan C=1$，所以 $B=C=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，B 选项正确；对于 C，若 $c=2a\cos B$，由正弦定理可得 $\sin C=2\sin A\cos B$，结合两角和的正弦公式得 $\Rightarrow\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin A\cos B\Rightarrow\sin A\cos B=\sin B\cos A$

又 $A,B\in(0,\pi)$ 且 $A+B=\pi$，所以 $\cos A\cos B\neq0$，故 $\tan A=\tan B\Rightarrow A=B, \triangle ABC$ 等腰不一定是直角三角形，所以 C 错误；对于选项 D，要使满足条件的三角形有且只有两个，则 $b\sin A<a<b$，因为 $a=2\sqrt{3}, b=4$，

所以 $4\sin A<2\sqrt{3}$，即 $\sin A<\dfrac{\sqrt{3}}{2}, A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $0<A<\dfrac{\pi}{3}$.故选项 D 错误.故选：AB.

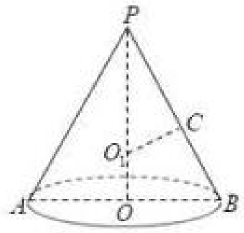
12.BC 【解析】对于 A 中，圆锥 PO 轴截面 PAB 是边长为 4 的等边三角形，

可得圆锥 PO 的底面圆的半径为 $r=2$，高 $h=PO=2\sqrt{3}$，所以 A 错误；

对于 B 中，母线长为 $l=4$，底面圆的半径为 $r=2$，则圆锥的侧面积为

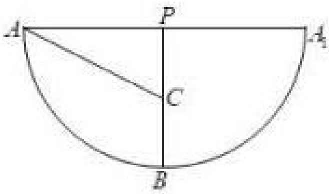
$S_{侧}=\pi rl=\pi\times2\times4=8\pi$，所以 B 正确；

对于C中，设圆锥的内切球球心为O_1，半径为r_1，如图所示，



由$\triangle PO_1C$与$\triangle PBO$相似，可得$\dfrac{O_1C}{OB}=\dfrac{PO_1}{PB}$，即$\dfrac{r_1}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}-r_1}{4}$，解得$r_1=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，即圆锥$PO$的内切球的表面积为$\dfrac{16\pi}{3}$，所以C正确；对于D中，如图所示，设圆锥$PO$侧面展开图圆心角为$2\theta$，

由弧长$\overset{\frown}{AA_1}$等于底面圆的周长，可得$2\theta\times4=2\pi\times2$，可得$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，



在直角$\triangle APC$中，$PA=4,PC=2$，

可得$AC=\sqrt{PA^2+PC^2}=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$，

即若C为PB的中点，则沿圆锥PO的侧面由点A到点C的最短路程是$2\sqrt{5}$，所以D不正确.故选：BC.

13. $1+\dfrac{7}{5}\mathrm{i}$　【解析】由题意得$z_1-2z_2+2(2z_1+z_2)=5z_1=5+\mathrm{i}+6\mathrm{i}=5+7\mathrm{i}$，所以$z_1=1+\dfrac{7}{5}\mathrm{i}$.

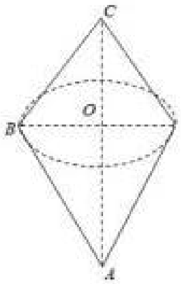
14. $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$　【解析】因为$\overrightarrow{AB}=(1,2),\overrightarrow{CD}=(3,3)$，所以$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{CD}$方向上的投影向量坐标为

$$\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|}\cdot\frac{\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|}=\frac{1\times3+2\times3}{\sqrt{3^2+3^2}}\cdot\frac{\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|}=\frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

15. $\dfrac{84\pi}{5}$　【解析】一个直角$\triangle ABC$的两直角边长分别是$AB=4,BC=3$，所以，

斜边长为$AC=5$，以这个直角三角形的斜边所在直线为旋转轴，其余两边旋转一周形成的面所围成的旋转体是两个圆锥的组合体，如图示，$r=BO=\dfrac{AB\cdot BC}{AC}=\dfrac{4\times3}{5}=\dfrac{12}{5}$，

故旋转体的表面积为$S=\pi\times BO\times(BC+AB)=\pi\times\dfrac{12}{5}\times(3+4)=\dfrac{84\pi}{5}$



16. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】作出圆锥的轴截面，如图所示，因为圆锥 PO 轴截面 PAB 是边长为 2 的等边三角形，

可得圆锥 PO 的底面圆的半径为 $r=1$，高 $h=PO=\sqrt{3}$，

设内接圆柱的底面半径为 r'，

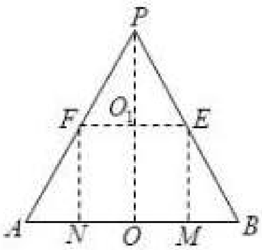
在直角 $\triangle PO_1E$ 中，可得 $O_1E=r',\angle PEO_1=60^\circ$，则 $PO_1=\sqrt{3}r'$，

所以 $ME=OO_1=PO-PO_1=\sqrt{3}-\sqrt{3}r'=\sqrt{3}\cdot(1-r')$，

所以内接圆柱的侧面积为 $S_1=2\pi r'ME=2\pi r'\times\sqrt{3}\cdot(1-r')\le 2\sqrt{3}\pi\cdot\left(\frac{r'+1-r'}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$，

当且仅当 $r'=1-r'$ 时，即 $r'=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，此时 $OO_1=\sqrt{3}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以圆锥 PO 的内接圆柱的侧面积最大时，该圆柱的高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



17.【解析】(1) 复数 $z_1=a+\mathrm{i}$，则 $z_1^2=(a+\mathrm{i})^2=\left(a^2-1\right)+2a\mathrm{i}=2\mathrm{i}$，

又 $a\in R$，因此 $\begin{cases}a^2-1=0\\2a=2\end{cases}$，解得 $a=1$，

所以实数 a 的值是 1.

(2) 复数 $z_1=a+\mathrm{i},z_2=1-\mathrm{i},a\in\mathrm{R}$，

则 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(a+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{(a-1)+(a+1)\mathrm{i}}{2}=\frac{a-1}{2}+\frac{a+1}{2}\mathrm{i}$，

因为 $\frac{z_1}{z_2}$ 是纯虚数，于是 $\begin{cases}\frac{a-1}{2}=0\\ \frac{a+1}{2}\neq 0\end{cases}$，解得 $a=1$，

因此 $\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{i}$，又 $\mathrm{i}^1=\mathrm{i},\mathrm{i}^2=-1,\mathrm{i}^3=-\mathrm{i},\mathrm{i}^4=1$，

则 $n\in\mathrm{N}^*,\mathrm{i}^{4n-3}=\mathrm{i},\mathrm{i}^{4n-2}=-1,\mathrm{i}^{4n-1}=-\mathrm{i},\mathrm{i}^{4n}=1$，即有 $n\in\mathrm{N}^*,\mathrm{i}^{4n-3}+\mathrm{i}^{4n-2}+\mathrm{i}^{4n-1}+\mathrm{i}^{4n}=0$，

所以 $\frac{z_1}{z_2}+\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2023}=505\left(\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4\right)+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3=-1$

18.【解析】（1）连结 C_1D 交 D_1C 于点 G，连结 GF,EG，

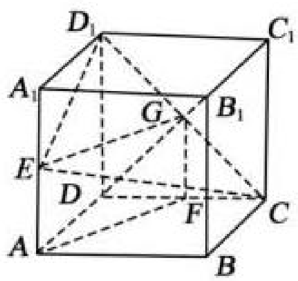
因为点 F,G 分别是 DC,D_1C 的中点，

所以 $FG\,//\,DD_1$，且 $FG=\frac{1}{2}DD_1$，

所以 $FG\,//\,AE,FG=AE$，即四边形 $AEGF$ 是平行四边形，

所以 $AF\,//\,EG$，且 $AF\not\subset$ 平面 $CED_1,EG\subset$ 平面 CED_1，

所以 $AF\,//$ 平面 CED_1.



（2）因为 $AC=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，则

$CE=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3},ED_1=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},CD_1=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

所以 $CE^2+ED_1^2=DC_1^2$，所以 $CE\perp ED_1,S_{\triangle CED_1}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

因为 $AD\perp DC$，且 $DD_1\perp AD,DD_1\cap DC=D$，

所以 $AD\perp$ 平面 DD_1C_1C，

因为 $AA_1 // DD_1$，所以点 E 到平面 DD_1C_1C 的距离为 $1, S_{\triangle CFD_1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{2}$，

设点 F 到平面 CED_1 的距离为 h，

根据等体积转化可知 $V_{F-CED_1}=V_{E-CFD_1}$，

即 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1$，解得：$h=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

所以点 F 到平面 CED_1 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

（3）否.

19.【解析】（1）$\because \overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, C$ 是 AB 的中点，

$\therefore \overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{a}\right)=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}$

（2）证明：$\because \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{a}$，

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\vec{a}=-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

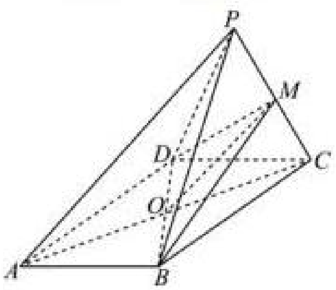
$\therefore \overrightarrow{AE}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 平行，又 $\because \overrightarrow{AE}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 有公共点 A，

$\therefore A, D, E$ 三点共线.

20.解：（1）连接 AC 交 BD 于 O，连接 OM，如图所示；
因为 M 为 PC 的中点，O 是 AC 的中点，则 $PA // OM$

$OM\subset$ 平面 $MBD, PA\not\subset$ 平面 MBD，

所以 $PA //$ 平面 MBD



（2）在 $\triangle ABD$ 中，$AD=6, AB=3, \angle BAD=60^{\circ}$，

所以 $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle BAD=27$，

所以 $AD^2=AB^2+BD^2$，所以 $AB\perp BD$；
因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AB\parallel CD$，所以 $BD\perp CD$；
又因为平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，

且平面 $PCD\cap$ 平面 $ABCD=CD,BD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $BD\perp$ 平面 PCD；
因为 $BD\subset$ 平面 MBD，所以平面 $MBD\perp$ 平面 PCD.

21.【解析】(1) $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}(c\sin C+b\sin B-a\sin A)$，由正弦定理得

$\frac{1}{2}abc=\frac{\sqrt{2}}{2}(b^2+c^2-a^2)$

根据余弦定理可知 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$，

所以 $\frac{1}{2}abc=\sqrt{2}bc\cos A$，

又 $a=\sqrt{2}$，得 $\cos A=\frac{1}{2}$，因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2) 因为 $A=\frac{\pi}{3},a=\sqrt{2}$，由余弦定理 $2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}$，

即 $2=b^2+c^2-bc$，

由于 $b^2+c^2\ge 2bc$，所以 $2=b^2+c^2-bc\ge 2bc-bc=bc$，

即 $bc\le 2$（当且仅当 $b=c$ 时取等号），

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}\le\frac{1}{2}\times 2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$（当且仅当 $b=c$ 时取等号），

所以 $b=c$ 时 $\triangle ABC$ 的面积最大，最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

22.【解析】(1) 证明：在图 1 中，

$\because\angle C=\frac{\pi}{2}$，即 $AC\perp BC$，且 $DE\parallel BC$，

$\therefore DE\perp DC,DE\perp AD$，

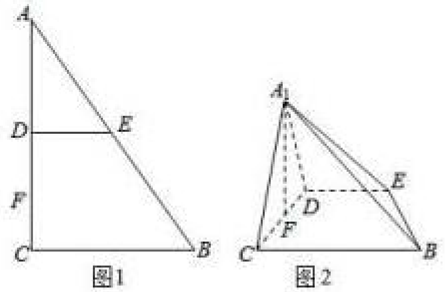


图1　　图2

则在图 2 中，$DE \perp DC, DE \perp A_1D$，

又$\because DC \cap DA_1 = D, DC, DA_1 \subset$平面 A_1DC

$\therefore DE \perp$平面 A_1DC .

$\because A_1F \subset$平面 $A_1DC, \therefore DE \perp A_1F$.

又$\because A_1F \perp CD, CD \cap DE = D, CD, DE \subset$平面 $BCDE$，

$\therefore A_1F \perp$平面 $BCDE$.

（2）解：由已知 $DE \parallel BC$，且 $DE = \frac{1}{2}BC$，得 D, E 分别为 AC, AB 的中点，

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$，

则 $A_1E = EB = 5, A_1D = DC = 4$，由（1）$DE \perp DC$，

$DE \perp A_1D$，二面角 $A_1 - DE - C$ 的平面角为 $\angle A_1DC = \frac{\pi}{3}$，

所以 $DF = 2, A_1F = 2\sqrt{3}, BF = \sqrt{CF^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$

因为 $A_1F \perp$平面 $DEBC$，

所以 A_1B 与平面 $DEBC$ 所成的角为 $\angle A_1BF$，

在 $Rt\triangle A_1FB$ 中，$\tan\angle A_1BF = \frac{A_1F}{FB} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。