

贵州省高三年级适应性联考(一)

数学参考答案及解析

一、选择题

1. B 【解析】由题可得 $A \cap B = \{0, 1, 2\}$. 故选 B.

2. A 【解析】设 $z = a + bi$, 故 $(a + bi)(i - 1) = -(a + b) + (a - b)i = 1 + i$, 故 $\begin{cases} a + b = -1 \\ a - b = 1 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$, 即 $z = -i$, $\bar{z} = i$, 虚部为 1. 故选 A.

3. C 【解析】 $\sin\left(\frac{2023\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha = \frac{1}{4}$, $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8}$. 故选 C.

4. C 【解析】 $\lambda b = (\lambda, -\lambda)$, $\mu a = (\mu, \mu)$, $a + \lambda b = (1, 1) + (\lambda, -\lambda) = (1 + \lambda, 1 - \lambda)$, $\mu a + b = (\mu, \mu) + (1, -1) = (\mu + 1, \mu - 1)$, $(a + \lambda b) \parallel (\mu a + b)$ 得 $(1 + \lambda)(\mu - 1) = (1 - \lambda)(\mu + 1)$, 化简得: $\lambda\mu = 1$. 故选 C.

5. C 【解析】设辐射物中铯 90 的含量为 a , 至少经过 t 年辐射物中铯 90 的剩余量低于原有的 7.46%, 即 $a(1 - 0.0247)^t \leq 0.0746a$, 即 $t \geq \log_{0.9753} 0.0746 = \frac{\ln 0.0746}{\ln 0.9753} \approx \frac{-2.606}{-0.03} \approx 87$ 年. 故选 C.

6. C 【解析】由已知可得 $\tan \alpha = a = \frac{b}{2}$, $\therefore b = 2a$ ①,

$$\text{又 } \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{2}{3}, \therefore \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{2}{3},$$

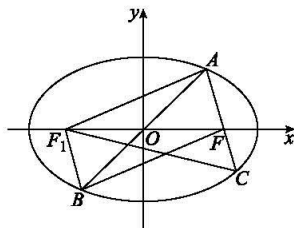
$$\therefore \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2}{3}, \therefore \frac{1 - a^2}{1 + a^2} = \frac{2}{3} \quad \text{②}, \text{①②联立得}$$

$$\begin{cases} b = 2a \\ \frac{1 - a^2}{1 + a^2} = \frac{2}{3} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ b = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases} \text{或} \begin{cases} a = -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ b = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}, \therefore a - b =$$

$$\pm \frac{\sqrt{5}}{5}. \text{ 故选 C.}$$

7. B 【解析】由题知可按照最后一个服务区有 2 名志愿者和 3 名志愿者进行分配. ① $6 = 1 + 1 + 2 + 2$, 有 $C_6^2 \frac{C_4^2 C_2^1 C_1^1}{A_2^2} A_3^3 = 540$; ② $6 = 1 + 1 + 1 + 3$, 有 $C_6^3 C_3^1 C_2^1 C_1^1 = 120$, 共有 $540 + 120 = 660$ (种). 故选 B.

8. A 【解析】设椭圆左焦点为 $F_1(-c, 0)$, 连接 AF_1 , BF_1 , CF_1 , 设 $|CF_1| = m$, ($m > 0$), 结合椭圆对称性得 $|AF_1| = |BF_1| = 3m$, 由椭圆定义得 $|AF| = 2a - 3m$, $|CF_1| = 2a - m$, 则 $|AC| = 2a - 2m$. 因为 $|OF_1| = |OF|$, $|OA| = |OB|$, 则四边形 AF_1BF 为平行四边形, 则 $AF_1 \parallel BF$, 而 $BF \perp AC$, 故 $AF_1 \perp AC$, 则 $|AF_1|^2 + |AC|^2 = |CF_1|^2$, 即 $9m^2 + (2a - 2m)^2 = (2a - m)^2$, 整理得 $m = \frac{a}{3}$, 在 $\text{Rt} \triangle FAF_1$ 中, $|AF_1|^2 + |AF|^2 = |FF_1|^2$, 即 $9m^2 + (2a - 3m)^2 = (2c)^2$, 即 $a^2 + (2a - a)^2 = (2c)^2$, $\therefore a^2 = 2c^2$, 故 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 A.



二、选择题

9. BCD 【解析】对于 A: 线性相关系数 $|r|$ 越接近于 1, 两个变量的相关性越强, 反之, 线性相关性越弱, 故 A 错误. 对于 B: 在经验回归方程 $\hat{y} = 0.5x + 1$ 中, 当解释变量每增加 1 个单位时, 响应变量将平均增加 0.5 个单位, 故 B 正确; 对于 C: 随机变量 X 的期望为

数学

参考答案及解析

$E(X)$, 则 $E(aX+b)=aE(X)+b$; 所以 $E(X)=2$,
 $E(2X-1)=2E(X)-1=3$, 故 C 正确; 对于 D: 因为
 $X \sim B\left(n, \frac{1}{2}\right)$, $D(X)=n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$, 则 $D(3X+1)=9D(X)=\frac{9n}{4}=9$, 解得 $n=4$, 故 D 正确. 故
 选 BCD.

10. ABD 【解析】对于 A, $b(\sqrt{3} \sin A - \cos C) = (c-a)$

$\cdot \cos B$, 由正弦定理得 $\sin B(\sqrt{3} \sin A - \cos C) =$
 $(\sin C - \sin A) \cos B$, $\sqrt{3} \sin B \sin A - \sin B \cos C =$
 $\sin C \cos B - \sin A \cos B$, $\sqrt{3} \sin B \sin A + \sin A \cos B =$

$\sin A$, 因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $\sin A \neq 0$, 所以
 $\sqrt{3} \sin B + \cos B = 1$, $\sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $B = \frac{2\pi}{3}$, 故 A

正确; 对于 B, 由余弦定理知 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$,
 $9 = a^2 + c^2 + ac$, 因为 $a > 0, c > 0$, 所以 $9 = a^2 + c^2 + ac$
 $\geq 3ac$, $ac \leq 3$, 当且仅当 $a=c$ 时等号成立, 因为

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{4} ac$, 所以 $S_{\triangle ABC}$ 的最大值为

$\frac{3\sqrt{3}}{4}$, 故 B 正确; 对于 C, 由 B 知 $9 = a^2 + c^2 + ac =$

$(a+c)^2 - ac$, 则 $(a+c)^2 = 9 + ac$, 所以 $(a+c)^2 = 9 + ac$
 $\leq 12 \Rightarrow a+c \leq 2\sqrt{3}$, 当且仅当 $a=c$ 时等号成立, 所以 $a+$

$b+c$ 的最大值为 $3+2\sqrt{3}$, 故 C 错; 对于 D, 因为 BM 为

AC 边上的中线, 所以 $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$, $|\overrightarrow{BM}| =$

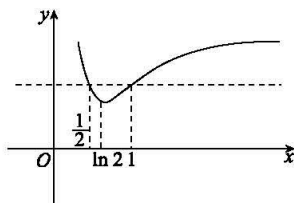
$\frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{BA}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + 2 \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}} = \frac{1}{2} \sqrt{c^2 + a^2 - ac}$,

得 $|\overrightarrow{BM}| = \frac{1}{2} \sqrt{9-2ac}$, 因为 $ac \leq 3$, 所以 $|\overrightarrow{BM}|$ 的最

小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 D 正确. 故选 ABD.

11. AB 【解析】由 $f(x) = \log_2 x + \frac{1}{x}$, 得 $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2}$

$-\frac{1}{x^2} = \frac{x - \ln 2}{x^2 \ln 2}$,



当 $x \in (0, \ln 2)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in$

$(\ln 2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 则 $f(x)$ 在
 $x = \ln 2$ 时取得极小值, 也为最小值 $f(\ln 2)$, 故 A 正

确; 又 $f(\ln 2) = \log_2 \ln 2 + \frac{1}{\ln 2}$, 而 $\log_2 \frac{1}{2} < \log_2 \ln 2$

$< \log_2 \ln e$, 所以 $-1 < \log_2 \ln 2 < 0$, 而 $\frac{1}{\ln 2} > \frac{1}{\ln e} = 1$,

即 $\frac{1}{\ln 2} > 1$, 故 $f(\ln 2) = \log_2 \ln 2 + \frac{1}{\ln 2} > 0$, 又 $\frac{1}{2} <$

$\ln 2 < 1$, 且 $f(1) = \log_2 1 + 1 = 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{1}{2} +$

$2 = 1$, 故 $f(x)$ 大致图象如下, 故对于 $f(x) = k$ 有两

个解, k 的最小整数值为 1, 且 $f(x)$ 无零点, B 正确,

D 错误. 由 $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1)$, $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} > 2 \ln 2 =$

$\ln 4$, 故对 $f(x_1) = f(x_2) = k$, 可知 $x_1 + x_2 > \ln 4$,

故 C 错误. 故选 AB.

12. ABD 【解析】因为 $f(x) + g'(x) - 8 = 0$, 令 $x = 1$,

则 $f(1) + g'(1) - 8 = 0$ ①, $f(x) - g'(4-x) - 8 =$

0, 令 $x = 3$, 则 $f(3) - g'(1) - 8 = 0$ ②, 联立①②可

得 $f(1) + f(3) = 16$, 故 A 正确; 由题可知 $g'(x) =$

$-g'(4-x)$, 又因为 $g(x)$ 是偶函数, $g'(x)$ 是奇函

数, 由 $g'(x) = -g'(-x) = -g'(4-x)$ 可知

$g'(x) = g'(x+4)$, 所以 $g'(x)$ 的周期为 4, 又

$\because g'(0) = -g'(0)$, 故 $g'(0) = g'(4) = 0$, $f(x) = 8 -$

$g'(x)$, 故 $f(4) = 8 - g'(4) = 8$, 故 B 正确; 因为

$g'(-1) = -g'(1)$, 由 $g'(x) = g'(x+4)$ 得

$g'(-3) = g'(1)$, 故 $g'(-3) = -g'(-1)$, 所以

$f(-3) = 8 - g'(-3)$, $f(-1) = 8 - g'(-1)$, 所以

参考答案及解析

数学

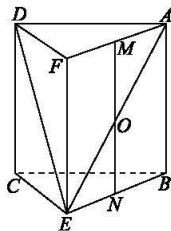
$f(-3)+f(-1)=16-g'(-3)-g'(-1)=16$, 即
 $f(-3)+f(-1)=16$, 不能得出 $f(-3)=f(-1)$,
 故 C 错误; 因为 $g'(1)=-g'(3)$, 得 $g'(1)+$
 $g'(3)=0$, 在 $g'(x)=-g'(4-x)$ 中, 令 $x=2$, 可
 得 $g'(2)=0$, 又 $g'(4)=0$, 故 $g'(1)+g'(2)+g'(3)$
 $+g'(4)=0$, 所以 $\sum_{k=1}^{2023} g'(k) = 505 \times 0 + g'(1) +$
 $g'(2) + g'(3) = 0$, 故 D 正确. 故选 ABD.

三、填空题

13. $\frac{2\pi}{3}$ 【解析】由 $f(x)$ 为偶函数可知 $m - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} +$
 $k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 故 m 取最小正值为 $\frac{2\pi}{3}$. 故答案为 $\frac{2\pi}{3}$.

14. $\frac{24}{7}$ 【解析】曲线 C 方程化为 $(x-1)^2 + (y-3)^2 =$
 9 , 是以 $(1, 3)$ 为圆心, 3 为半径的圆, $\frac{y}{x+3}$ 表示点
 $P(x, y)$ 与点 $(-3, 0)$ 连线的斜率, 不妨设 $\frac{y}{x+3} = k$,
 即直线 $l: kx - y + 3k = 0$, 又 P 在圆上运动, 故直线
 与圆 C 有公共点, 则 $\frac{|k-3+3k|}{\sqrt{k^2+1}} \leq 3$, 化简得 $7k^2 -$
 $24k \leq 0$, 解得 $0 \leq k \leq \frac{24}{7}$, 故 $\frac{y}{x+3}$ 的最大值为 $\frac{24}{7}$. 故
 答案为 $\frac{24}{7}$.

15. 68π 【解析】可以将四棱锥 $E-ABCD$ 补成一个直
 三棱柱 $ADF-BCE$, 故直三棱柱的外接球即为四棱
 锥的外接球. 取 AF, BE 的中点 M, N , 则 MN 的中
 点 O 即为外接球球心, 所以半径 $R = OE =$
 $\sqrt{ON^2 + EN^2} = \sqrt{3^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{17}$, 所以外接
 球表面积 $4\pi R^2 = 68\pi$. 故答案为 68π .



16. 7π 【解析】 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象过点
 $\left(\frac{\pi}{8}, 1\right), \left(\frac{5\pi}{8}, -1\right), \left(\frac{9\pi}{8}, 1\right), \left(\frac{13\pi}{8}, -1\right),$
 $\left(\frac{17\pi}{8}, 1\right), \because f(0) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{7}{8}$, 所以 $x_1 + x_2$
 $= 2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}, x_2 + x_3 = 2 \times \frac{5\pi}{8} = \frac{5\pi}{4}, x_3 + x_4 = 2 \times$
 $\frac{9\pi}{8} = \frac{9\pi}{4}, x_4 + x_5 = 2 \times \frac{13\pi}{8} = \frac{13\pi}{4}$, 所以 $x_1 + 2x_2 +$
 $2x_3 + 2x_4 + x_5 = 7\pi$. 故答案为 7π .

四、解答题

17. 解: (1) 由题知 $\cos \alpha = \frac{1}{2}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, (2分)

$$y_Q = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha = \frac{1}{2}. \quad (4分)$$

(2) 由题知 $a = \sqrt{2}, b = 2, \sin A = \frac{1}{2}, \because A, B \in (0, \pi)$,

且 $a < b$, 所以 $A < B$,

$$\text{而 } \sin A = \frac{1}{2}, \text{ 则 } A = \frac{\pi}{6}, \text{ 故 } \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (6分)$$

由正弦定理可知 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 整理得 $c^2 -$
 $2\sqrt{3}c + 2 = 0$,

$$\text{解得 } c = \sqrt{3} \pm 1, \quad (8分)$$

$$\text{故 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \text{ 或 } S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}. \quad (10分)$$

18. 解: (1) 当 $n \geq 2$ 时, $S_n - 1 = (n-1)^2 - (n-1) + 1 =$
 $n^2 - 3n + 3$,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - n + 1 - (n^2 - 3n + 3) = 2n - 2, \quad (3分)$$

数学

参考答案及解析

当 $n=1$ 时, $a_1=S_1=1$, (4分)

故 $a_n = \begin{cases} 1, n=1 \\ 2n-2, n \geq 2 \end{cases} (n \in \mathbf{N}^*)$. (5分)

(2) $b_1 = \frac{1}{a_1 a_2} = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$. (6分)

当 $n \geq 2$ 时, $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n-2)2n} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$, (8分)

故 $T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$
 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$
 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4n}$, (10分)

要使 $T_n \leq \frac{45}{64}$, 即 $\frac{3}{4} - \frac{1}{4n} \leq \frac{45}{64}$, 解得 $n \leq \frac{16}{3}$, 又 $n \in \mathbf{N}^*$, 故 n 取最大值为 5. (12分)

19. 解: (1) 由题意可知, 四边形 $ABCD$ 是直角梯形,

$\therefore \triangle AOD$ 与 $\triangle COB$ 相似, $AD = \frac{1}{2}BC$,

$\therefore AO = \frac{1}{2}OC, OD = \frac{1}{2}OB$, (2分)

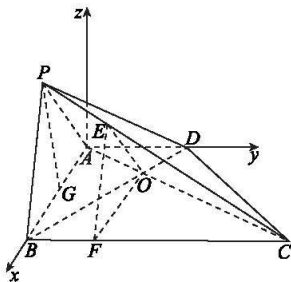
因为过点 O 作平行于平面 PAB 的面 α 分别交 PC , BC 于点 E, F , 由面面平行的性质定理得 $OE \parallel PA$, $OF \parallel AB, EF \parallel PB$, 所以 $\triangle OEF$ 与 $\triangle PAB$ 相似, 相似比为 $3:2$, 因为 $\triangle PAB$ 的周长为 6, 所以三角形 $\triangle OEF$ 的周长为 4. (5分)

(2) $\because \alpha \parallel$ 平面 PAB , $\therefore$ 平面 α 与平面 PCD 的夹角与平面 PAB 与平面 PCD 的夹角相等, $\because AD=2$, $PA=2, PD=2\sqrt{2}, \therefore PD^2=AD^2+PA^2$, $\therefore AD \perp PA$, 又 $AD \perp AB, AB \cap PA=A, \therefore AD \perp$ 平面 PAB , (6分)

$ADC \subset$ 平面 $ABCD, \therefore$ 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 取

AB 的中点 G , 因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形, $\therefore PG \perp AB, \therefore PG \perp$ 平面 $ABCD$. (7分)

以 A 点为原点, AB 所在直线为 x 轴, AD 为 y 轴, 过点 A 与 PG 平行的直线为 z 轴, 建立如图所示空间直角坐标系,



$A(0,0,0), D(0,2,0), P(1,0,\sqrt{3}), C(2,4,0), \overrightarrow{AD} = (0,2,0), \overrightarrow{DC} = (2,2,0), \overrightarrow{DP} = (1,-2,\sqrt{3})$, 设平面 PCD 的法向量 $\mathbf{n} = (x,y,z)$,
 $\begin{cases} \overrightarrow{DC} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \overrightarrow{DP} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases}, \begin{cases} 2x+2y=0 \\ x-2y+\sqrt{3}z=0 \end{cases}, \mathbf{n} = (1, -1, -\sqrt{3}), (10分)$

$\because AD \perp$ 平面 $PAB, \therefore \overrightarrow{AD}$ 是平面 PAB 的法向量,

$\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{AD}| |\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

所以平面 α 与平面 PCD 夹角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. (12分)

20. 解: (1) 令事件 A_i : 甲组在第 i 局获胜, $i=1,2,3$. 甲

组胜的概率为: $p = p(A_1 A_2) + p(A_1 \overline{A_2} A_3) + p(\overline{A_1} A_2 A_3) = p^2 + 2p^2(1-p) = \frac{1}{2}$, (3分)

解得 $p = \frac{1}{2}$. (6分)

(2) 由题意知, 在甲组第一局获胜的情况下, 甲组输掉比赛事件为: 甲组接下来的比赛中连输两场,

即 $p = p(\overline{A_2} A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, (9分)

参考答案及解析

数学

故而甲组、乙组应按照 3:1 的比例来分配比赛奖品，
即甲组应获得 21 个篮球，乙获得 7 个篮球比较合
理. (12 分)

$$21. \text{解: (1) 依题意有} \begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{c}{2} = 1 \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}, \quad (4 \text{ 分})$$

(2) 由(1)可知右焦点 $F(2, 0)$, 设直线 $l_{AB}: x = ny + 2$
($n \neq 0$), $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{由} \begin{cases} x = ny + 2 \\ x^2 - 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}, \text{化简得 } (n^2 - 3)y^2 + 4ny + 1 = 0$$

$$(n \neq \pm\sqrt{3}), \Delta = 12n^2 + 12 > 0,$$

$$\text{故 } y_1 + y_2 = \frac{-4n}{n^2 - 3}, x_1 + x_2 = n(y_1 + y_2) + 4 = \frac{-12}{n^2 - 3}, \quad (6 \text{ 分})$$

$$\therefore P\left(\frac{-6}{n^2 - 3}, \frac{-2n}{n^2 - 3}\right). \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{又} \because CD \perp AB, \text{则 } l_{CD}: x = -\frac{1}{n}y + 2,$$

$$\text{同理可得: } Q\left(\frac{6n^2}{3n^2 - 1}, \frac{-2n}{3n^2 - 1}\right), \quad (8 \text{ 分})$$

$$k_{PQ} = \frac{\frac{-2n}{3n^2 - 1} + \frac{2n}{n^2 - 3}}{\frac{6n^2}{3n^2 - 1} + \frac{6}{n^2 - 3}} = \frac{2n}{3(n^2 - 1)}, \quad (9 \text{ 分})$$

$$\therefore l_{PQ}: y = \frac{2}{3} \cdot \frac{n}{n^2 - 1} \left(x - \frac{6n^2}{3n^2 - 1}\right) - \frac{2n}{3n^2 - 1}, \text{化简得}$$

$$y = \frac{2n}{3(n^2 - 1)}(x - 3). \quad (11 \text{ 分})$$

故直线 PQ 过定点 $(3, 0)$. (12 分)

$$22. \text{解: (1)} \because h(x) = \frac{f(x)}{x}, f(x) = x \ln x + a - 1,$$

$$\therefore h(x) = \ln x + \frac{a-1}{x},$$

$$\text{所以 } h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a-1}{x^2} = \frac{x-(a-1)}{x^2}, (x \in (0, +\infty)). \quad (1 \text{ 分})$$

当 $a-1 \leq 0$ 时, 即 $a \leq 1$ 时, $h'(x) > 0$, 函数 $h(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上单调递增, 无极小值; (2 分)

当 $a-1 > 0$ 时, 即 $a > 1$ 时, 令 $h'(x) < 0$, 解得 $0 < x < a-1$, 函数 $h(x)$ 在 $(0, a-1)$ 上单调递减;

令 $h'(x) > 0$, 解得 $x > a-1$, 函数 $h(x)$ 在 $(a-1, +\infty)$ 上单调递增.

$$\therefore x = a-1 \text{ 时, 函数 } h(x) \text{ 取得极小值 } h(a-1) = 1 + \ln(a-1), \quad (4 \text{ 分})$$

综上所述, 当 $a \leq 1$ 时, $h(x)$ 无极小值; 当 $a > 1$ 时, $h(x)$ 取极小值为 $1 + \ln(a-1)$. (5 分)

$$(2) \text{令 } F(x) = f(x) - g(x) = x \ln x - a \sin x + 1, x \in (0, +\infty).$$

当 $-1 \leq a \leq 1$ 时, 要证 $f(x) > g(x)$,

$$\text{即证 } F(x) > 0, \text{即 } x \ln x - a \sin x + 1 > 0,$$

$$\text{即证 } x \ln x > a \sin x - 1, \quad (6 \text{ 分})$$

① 当 $0 < a \leq 1$ 时,

$$\text{令 } t(x) = x - \sin x, t'(x) = 1 - \cos x \geq 0, \text{所以 } t(x)$$

在 $x \in (0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $t(x) > t(0) = 0$,

$$\text{即 } x > \sin x. \therefore ax - 1 > a \sin x - 1, \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{令 } u(x) = x \ln x - x + 1, u'(x) = \ln x,$$

当 $x \in (0, 1)$, $u'(x) < 0$, $u(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减;

$x \in (1, +\infty)$, $u'(x) > 0$, $u(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

故 $u(x) \geq u(1) = 0$, 即 $x \ln x \geq x - 1$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号, (8 分)

$$\text{又} \because 0 < a \leq 1, \therefore x \ln x \geq x - 1 \geq ax - 1,$$

由上面可知: $x \ln x \geq x - 1 \geq ax - 1 > a \sin x - 1$,

数学

参考答案及解析

所以当 $0 < a \leq 1$ 时, $x \ln x > a \sin x - 1$. (9 分)

②当 $a=0$ 时, 即证 $x \ln x > -1$. 令 $v(x) = x \ln x$,

$$v'(x) = \ln x + 1,$$

可得 $v(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上

单调递增,

$$v(x)_{\min} = v\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} > -1, \text{ 故 } x \ln x > -1.$$

(10 分)

③当 $-1 \leq a < 0$ 时, 当 $x \in (0, 1]$ 时, $a \sin x - 1 < -1$,

由②知 $v(x) = x \ln x \geq -\frac{1}{e}$, 而 $-\frac{1}{e} > -1$,

故 $x \ln x > a \sin x - 1$, (11 分)

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $a \sin x - 1 \leq 0$, 由(2)知 $v(x) =$

$x \ln x > v(1) = 0$, 故 $x \ln x > a \sin x - 1$;

所以, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $x \ln x > a \sin x - 1$.

综上①②③可知, 当 $-1 \leq a \leq 1$ 时, $f(x) > g(x)$.

(12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站(网址: www.zizzs.com)和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线