

“宜荆荆恩”2024 届高三起点考试

数 学 试 卷

2023.9

本试卷共 4 页,22 题,全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

★祝考试顺利★

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共计 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是正确的。请把正确的选项涂在答题卡相应位置上。

1. 已知 a 为实数,若复数 $z = (a^2 - 1) + (a - 1)i$ 为纯虚数,则 $\frac{a + i^{2024}}{1 - i}$ 的值为
A. 1 B. 0 C. $1 + i$ D. $1 - i$
2. 设集合 $A = \{x \mid |x - 1| < 2\}$, $B = \{x \mid x = 3n - 2, n \in \mathbb{Z}\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{1\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{-2, 1\}$ D. $\{-2, 1, 4\}$
3. 将 2 个不同的小球随机放入甲、乙、丙 3 个盒子,则 2 个小球在同一个盒子的概率为
A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{1}{3}$
4. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = \sqrt{3}$, $BC = 2$, 若 P 为边 BC 上的动点,则 $\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) =$
A. 0 B. 2 C. 4 D. 8
5. 定义在 $(0, +\infty)$ 上的减函数 $f(x)$ 满足条件:对 $\forall x, y \in (0, +\infty)$, 总有 $f(xy) = f(x) + f(y) - 1$, 则不等式 $f(\log_2 x - 1) > 1$ 的解集是
A. $(0, 4)$ B. $(4, +\infty)$ C. $(1, 4)$ D. $(2, 4)$
6. 设 $M(x_0, y_0)$ 为抛物线 $C: x^2 = 4y$ 上一点, F 为抛物线 C 的焦点,以 F 为圆心, $|FM|$ 为半径的圆与抛物线 C 的准线相交,则 y_0 的取值范围是
A. $[1, +\infty)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

数学试卷 第 1 页(共 4 页)

7. 已知 O 为坐标原点, 过点 $A(1,0)$ 作直线 $l: ax + by - a + 2b = 0 (a, b$ 不全为零) 的垂线, 垂足为 M , 当 a, b 变化时, $|OM|$ 的最小值为

- A. $\sqrt{2} + 1$ B. $\sqrt{2} - 1$ C. 1 D. 3

8. 定义: 在数列 $\{a_n\}$ 中, $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \frac{a_{n+1}}{a_n} = d (n \in \mathbf{N}^*)$, 其中 d 为常数, 则称数列 $\{a_n\}$ 为“等比差”数列. 已知“等比差”数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 3$, 则 $\frac{a_{24}}{a_{22}} =$

- A. 1763 B. 1935 C. 2125 D. 2303

二、选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共计 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 5 分, 选对但不全得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列说法正确的有

- A. 从 40 个个体中随机抽取一个容量为 10 的样本, 则每个个体被抽到的概率都是 0.25
 B. 已知一组数据 1, 2, m , 6, 7 的平均数为 4, 则这组数据的方差是 5
 C. 数据 26, 11, 14, 31, 15, 17, 19, 23 的 50% 分位数是 18
 D. 若样本数据 x_1, x_2, \dots, x_n 的标准差为 4, 则数据 $2x_1 + 1, 2x_2 + 1, \dots, 2x_n + 1$ 的标准差为 16

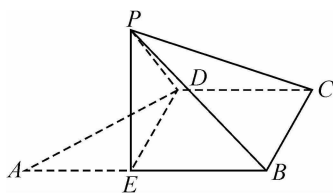
10. 一个质地均匀的正四面体各面上分别标有数字 1, 2, 3, 4, 抛掷该正四面体两次, 记 A 为“第一次向下的数字为偶数”, B 为“两次向下的数字之和为奇数”, 则下列说法正确的有

- A. $P(A) = \frac{1}{2}$ B. 事件 A 和事件 B 互为对立事件
 C. $P(B|A) = \frac{1}{2}$ D. 事件 A 和事件 B 相互独立

11. 如图, 直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD, AB \perp BC, BC = CD = \frac{1}{2}AB = 2, E$ 为 AB 中点, 以

DE 为折痕把 $\triangle ADE$ 折起, 使点 A 到达点 P 的位置, 且 $PC = 2\sqrt{3}$. 则下列说法正确的有

- A. $CD \perp$ 平面 EDP
 B. 四棱锥 $P - EBCD$ 外接球的体积为 $4\sqrt{3}\pi$
 C. 二面角 $P - CD - B$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$
 D. PC 与平面 PED 所成角的正切值为 $\sqrt{2}$



12. 关于函数 $f(x) = \ln(e^{2x} + 1) - x$, 下列说法正确的有

- A. $f(x)$ 在 R 上是增函数
 B. $f(x)$ 为偶函数
 C. $f(x)$ 的最小值为 $\ln 2$, 无最大值
 D. 对 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 都有 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$

三、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共计 20 分.

13. $(x - \frac{2}{x})^5$ 的展开式中 x 的系数为_____.
14. 将函数 $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ 的图像向左平移 φ ($\varphi > 0$) 个单位长度后,所得函数是奇函数,则 φ 的最小值为_____.
15. 四棱锥 $P - ABCD$ 中,底面是平行四边形, E, F 分别为线段 PD, PC 上的点, $\frac{PE}{ED} = \frac{3}{2}$, 若 $BF \parallel$ 平面 AEC ,则 $\frac{PF}{FC} =$ _____.
16. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$) 的左焦点为 F ,直线 FD 与双曲线 C 的右支交于点 D , A, B 为线段 FD 的两个三等分点,且 $|OA| = |OB| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ (O 为坐标原点),则双曲线 C 的离心率为_____.

四、解答题:本大题共 6 小题,共计 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

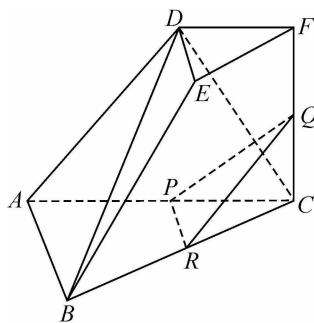
设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c ,且 $b = 3, c = 1, A = 2B$.

- (1) 求 a 的值;
- (2) 求 $\sin(A + \frac{\pi}{3})$ 的值.

18. (12 分)

如图,在三棱台 $ABC - DEF$ 中, $AB \perp AC, AB = 2DE = 2, AC = 2\sqrt{2}, CF = 2$,且 $CF \perp$ 平面 ABC . 设 P, Q, R 分别为棱 AC, FC, BC 的中点.

- (1) 证明:平面 $BCD \perp$ 平面 PQR ;
- (2) 求平面 BCD 与平面 BDE 所成的角的余弦值.



19. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{x^2 - 2ax}{e^x} (a \in \mathbb{R})$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x = 3$ 处取得极值, 求 a 的值, 并求此时曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上为减函数, 求 a 的取值范围.

20. (12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = \frac{n^2 + 3n}{2} (n \in \mathbb{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 且 $a_4 - 1, a_6 + 1$ 分别为数列 $\{b_n\}$ 的第二项和第三项.

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n^2 - a_n) \cdot b_{n+1}}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n < \frac{1}{2}$.

21. (12分)

甲、乙两个盒子中都装有大小、形状、质地相同的2个黑球和1个白球, 现从甲、乙两个盒子中各任取一个球交换放入另一个盒子中, 重复 $n (n \in \mathbb{N}^*)$ 次这样的操作后, 记甲盒子中黑球的个数为 X_n , 甲盒中恰有2个黑球的概率为 p_n , 恰有3个黑球的概率为 q_n .

(1) 求 p_1, q_1 ;

(2) 设 $c_n = p_n + 2q_n$, 证明: $c_{n+1} = \frac{1}{3}c_n + \frac{2}{3}$;

(3) 求 X_n 的数学期望 $E(X_n)$ 的值.

22. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 左、右顶点分别为 A, B , 点 P, Q 为椭圆上异于 A, B 的两个动点, $\triangle PAB$ 面积的最大值为 2.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设直线 AP, BQ 的斜率分别为 k_1, k_2 , $\triangle APQ$ 和 $\triangle BPQ$ 的面积分别为 S_1, S_2 . 若 $k_1 = 3k_2$, 求 $|S_1 - S_2|$ 的最大值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

