宜宾市普通高中2020级高考适应性考试

数学(理工类)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号. 回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.

3. 本试卷满分150分,考试时间120分钟. 考试结束后,请将答题卡交回.

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合$P=\{x|0<\log_2 x<1\}$,$Q=\{x|x\leqslant 2\}$,则

A. $P\cap Q=\varnothing$　　B. $P\cup Q=\mathbf{R}$　　C. $P\subseteq Q$　　D. $Q\subseteq P$

2. 已知复数$z=3+4\mathrm{i}$,且$z+a\bar{z}+b\mathrm{i}=9$,其中a,b是实数,则

A. $a=-2,b=3$　　B. $a=2,b=4$　　C. $a=1,b=2$　　D. $a=2,b=-4$

3. 已知数列$\{\frac{1}{2n-11}\}$的前n项和为S_n,则使得S_n最小时的n是

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

4. 已知p:$1<m<3$,q:$\frac{x^2}{m-1}+\frac{y^2}{3-m}=1$表示椭圆,则$p$是$q$的

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 已知两个平面α,β,两条直线l,m,则下列命题正确的是

A. 若$\alpha\perp\beta$,$l\subset\alpha$,则$l\perp\beta$

B. 若$l\subset\alpha$,$m\subset\beta$,$m\perp l$,则$\alpha\perp\beta$

C. 若$l\subset\alpha$,$m\subset\alpha$,$m//\beta$,$l//\beta$,则$\alpha//\beta$

D. 若l,m是异面直线,$l\subset\alpha$,$l//\beta$,$m\subset\beta$,$m//\alpha$,则$\alpha//\beta$

6. 在黑板上从左到右写2,0,2,3四个数,对两个相邻的数,每次用右边的数减左边的数的差填在这两数中间,从3开始到最左边的2为止,称为填一次. 比如填第一次:2,$\underline{-2}$,0,$\underline{2}$,2,$\underline{1}$,3, 其中划线部分是填的右边的数减左边的数的差. 则这样填2023次之后,黑板上所有数的和是

A. 2023　　B. 2025　　C. 2028　　D. 2030

7. 已知函数$f(x)=x^2+a\ln x$在区间$(1,+\infty)$上单调递增,则实数a的取值范围是

A.$a\geqslant -2$　　B.$a<-2$　　C.$a\geqslant 0$　　D.$a<0$

8. 同时抛掷两枚质地均匀的骰子一次，事件甲表示"第一枚骰子向上的点数为奇数"，事件乙表示"第二枚骰子向上的点数为偶数"，事件丙表示"两枚骰子向上的点数之和为6"，事件丁表示"两枚骰子向上的点数之和为7"，则

A. 事件甲与事件乙互斥　　B. $P(丙|乙)=\frac{5}{72}$

C. 事件甲与事件丁相互独立　　D. 事件丙与事件丁互为对立事件

9. 已知点M是圆$C:(x-4)^2+y^2=4$上的一个动点，点N是直线$y=x$上除原点O外的任意一点，则向量$\overrightarrow{OM}$在向量$\overrightarrow{ON}$上的投影的最大值是

A. $2\sqrt{2}+2$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $3\sqrt{2}+2$　　D. $3\sqrt{2}$

10. 若函数$f(x)=\begin{cases}(x-m)^2-2, & x<0\\ 2x^3-3x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$的最小值是$-1$，则实数$m$的取值范围是

A. $m\leqslant 0$　　B. $m\geqslant 1$　　C. $m\geqslant\sqrt{3}$　　D. $m>0$

11. 如图1，水平放置的正方体容器中注入了一定量的水，现将该正方体容器的一个顶点固定在地面上，使得DA，DB，DC三条棱与地面所成角均相等，此时水平面为HJK，如图2所示．若在图2中$\frac{DH}{DA}=\frac{1}{2}$，则在图1中$\frac{EF}{EG}=$

A. $\frac{4}{27}$

B. $\frac{1}{16}$

C. $\frac{1}{12}$

D. $\frac{1}{48}$

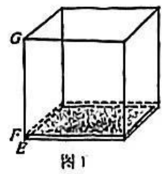


图1

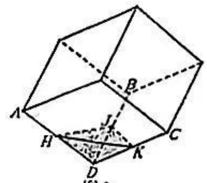


图2

12. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对边分别记为a,b,c，若$\frac{a}{c}=\frac{\cos A}{2-\cos C}$，$c=2$，则$\triangle ABC$面积的最大值是

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

二、填空题：本大题共4个小题，每小题5分，共20分．

13. 某学校共1000人参加数学测验，考试成绩ξ近似服从正态分布$N(110,\sigma^2)$，若$P(110\leqslant\xi\leqslant 130)=0.35$，则估计成绩不及格（在90分以下）的学生人数为________．

14. 音乐是由不同频率的声音组成的．若音1(do)的音阶频率为f，则简谱中七个音1(do)，2(re)，3(mi)，4(fa)，5(so)，6(la)，7(si)组成的音阶频率分别是f，$\frac{9}{8}f$，$\frac{81}{64}f$，$\frac{4}{3}f$，$\frac{3}{2}f$，$\frac{27}{16}f$，$\frac{243}{128}f$，其中后一个音阶频率与前一个音阶频率的比是相邻两个音的台阶．上述七个音的台阶只有两个不同的值，记为α，$\beta(\alpha>\beta)$，α称为全音，β称为半音，则$\lg\alpha^5+\lg\beta^2-\lg 2=$________．

15. 已知函数$f(x)=\ln x$，$g(x)=2x$，若$f(x_1)=g(x_2)$，则$|x_1-x_2|$的最小值是________．

16. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左，右焦点分别为$F_1,F_2$，离心率为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，过$F_2$作渐近线$y=\frac{b}{a}x$的垂线交$C$于$A,B$两点，点$A$在第一象限，若$|AF_2|=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$，则$\triangle ABF_1$的周长为__________．

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一) 必做题：共 60 分.

17.（12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对边分别记为 a,b,c.

条件①：$\dfrac{\sin A}{1-\cos A}=\dfrac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$；条件②：$\sin C\sin(B-A)=\sin B\sin(C-A)$.

从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知.

(1) 证明：$B=C$；

(2) 求 $\dfrac{2a+b}{c}+\dfrac{1}{\cos B}$ 的最小值.

18.（12 分）

近几年，在缺“芯”困局之下，国产替代的呼声愈发高涨，在国家的政策扶持下，国产芯片厂商呈爆发式增长. 为估计某地芯片企业的营业收入，随机选取了 10 家芯片企业，统计了每家企业的研发投入 (单位：亿) 和营业收入 (单位：亿)，得到如下数据：

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
研发投入 x_i	2	2	4	6	8	10	14	16	18	20
营业收入 y_i	14	16	30	38	50	60	70	90	102	130

并计算得 $\sum\limits_{i=1}^{10}x_i=100$，$\sum\limits_{i=1}^{10}y_i=600$，$\sum\limits_{i=1}^{10}x_i^2=1400$，$\sum\limits_{i=1}^{10}y_i^2=49200$，$\sum\limits_{i=1}^{10}x_iy_i=8264$.

(1) 求该地芯片企业的研发投入与营业收入的样本相关系数 r，并判断这两个变量的相关性强弱 (若 $0.30\leqslant|r|<0.75$，则线性相关程度一般，若 $|r|\geqslant 0.75$，则线性相关程度较高，r 精确到 0.01)；

(2) 现统计了该地所有芯片企业的研发投入，并得到所有芯片企业的研发投入总和为 268 亿，已知芯片企业的研发投入与营业收入近似成正比. 利用以上数据给出该地芯片企业的总营业收入的估计值.

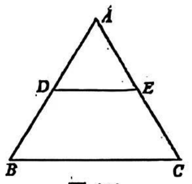
附：相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$，$\sqrt{33}\approx 5.745$.

19.（12 分）

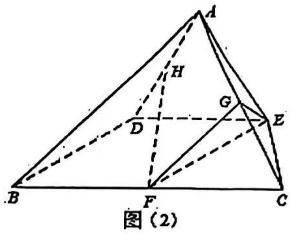
如图 (1)，在正三角形 ABC 中，D，E 分别为 AB，AC 中点，将 ΔADE 沿 DE 折起，使二面角 $A-DE-B$ 为直二面角，如图 (2)，连接 AB，AC，过点 E 作平面 EFG 与平面 ABD 平行，分别交 BC，AC 于 F，G.

(1) 证明：$EG \perp$ 平面 ABC；

(2) 点 H 在线段 AD 上运动，当 FH 与平面 EFG 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ 时，求 $\dfrac{AH}{AD}$ 的值.



图(1)



图(2)

20.（12分）

已知点 A 在 y 轴右侧，点 B，点 C 的坐标分别为 $(-1,0)$，$(1,0)$，直线 AB，AC 的斜率之积是3.

(1) 求点 A 的轨迹 D 的方程；

(2) 若抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 与点 A 的轨迹 D 交于 E，F 两点，过 B 作 $BH\perp EF$ 于 H，是否存在定点 G 使 $|HG|$ 为常数？若存在，求出 G 的坐标；若不存在，请说明理由.

21.（12分）

已知函数 $f(x)=mxe^{-x}+x-\ln x(m\in\mathbf{R})$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的极值点个数；

(2) 若 $m>0$，$f(x)$ 的最小值是 $1+\ln m$，求实数 m 的所有可能值.

(二) 选做题：共10分. 请考生在第22、23题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题记分.

22. (10分) 选修4－4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系中，曲线 E 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{2}+\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数)，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，射线 l_1：$\theta=\beta\left(-\dfrac{\pi}{4}<\beta<0\right)$ 与 E 交于 A，B 两点，射线 l_2：$\theta=\beta+\dfrac{\pi}{4}$ 与 E 交于 C，D 两点.

(1) 求曲线 E 的极坐标方程；

(2) 求 $\dfrac{|OC|+|OD|}{|OA|+|OB|}$ 的取值范围.

23. (10分) 选修4－5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=2\sqrt{x^2+2ax+a^2}-2|x-b|(a>0,b>0)$ 的最大值为2.

(1) 求 $a+b$ 的值；

(2) 证明：$\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{4}{(3a+1)b}\geqslant 12$.