2022—2023学年度(下)联合体高二期末检测

数学　参考答案及评分标准

一、单选题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

1． C　【解析】解$(x+2)(x-1)\le 0$，得$-2\le x\le 1$，则$A=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$，所以$\complement_U A=\{-4,\ -3,\ 2\}$．故选：C.

2． D　【解析】当$a>0$时，$f(a)=a-1=-\frac{1}{2}$，解得$a=\frac{1}{2}$；当$a\le 0$时，$f(a)=4a=-\frac{1}{2}$，解得$a=-\frac{1}{8}$．故选：D.

3． D　【解析】由图可得函数$y=f(x)$的图象在点P处的切线l与x轴交于点$(4,\ 0)$，与y轴交于点$(0,\ 4)$，则切线$l: x+y=4$，$\therefore f(2)=2$，$f'(2)=-1$，所以$f(2)+f'(2)=1$．故选：D.

4． A　【解析】由$E(X)=1$，$D(X)=\frac{4}{5}$，得$np=1$，$np(1-p)=\frac{4}{5}$，解得$n=5$，$p=\frac{1}{5}$，所以$P(X=4)=C_5^4\times\left(\frac{1}{5}\right)^4\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{625}$．故选：A.

5． B　【解析】由①，得$f(-x)=-f(x)$，即函数$f(x)$是奇函数．由②，得$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，即函数$f(x)$在（0，1）上单调递增．

A选项：$f(x)=-2x$是正比例函数，是奇函数，但在（0，1）上单调递减，不符合题意；

B选项：$f(x)=\sin\frac{3}{2}x$是奇函数．当$x\in(0,\ 1)$时，$\frac{3}{2}x\in\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$．因为$y=\sin x$在$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，所以$f(x)=\sin\frac{3}{2}x$在$(0,\ 1)$上单调递增，符合题意；

C选项：$f(x)=3x^2$是顶点在原点的二次函数，是偶函数，不符合题意；

D选项：$f(x)=\frac{5}{x}$是反比例函数，是奇函数，但在（0，1）上单调递减，不符合题意．故选：B.

6． B　【解析】在等差数列$\{a_n\}$中，由$S_{17}<0$，得$\frac{17(a_1+a_{17})}{2}<0$，则$a_1+a_{17}=2a_9<0$．又$a_6+a_{13}=a_9+a_{10}>0$，所以$a_9<0$，$a_{10}>0$，所以当$n=9$时，$S_n$取得最小值．故选：B.

7． C　【解析】A选项：由$|x-1|<1$得$-1<x-1<1$，解得$0<x<2$，所以“$x>0$”是“$|x-1|<1$”的必要不充分条件，A错误；

B选项：由题意得关于x的方程$ax^2+2x+c=0$的根为-1和2，所以$\frac{c}{a}=(-1)\times 2=-2$，B错误；

C选项：因为$a>b>c$，所以$a-c>0$，$b-c>0$，$a-b>0$，所以$\frac{1}{b-c}-\frac{1}{a-c}=\frac{a-b}{(b-c)(a-c)}>0$，所以$\frac{1}{b-c}>\frac{1}{a-c}$，C正确；

D选项：因为$x^2+2+\frac{3}{x^2+2}\ge 2\sqrt{(x^2+2)\cdot\frac{3}{x^2+2}}=2\sqrt{3}$，当且仅当$x^2+2=\frac{3}{x^2+2}$时等号成立，此时$x$无实数解，所以$f(x)=x^2+\frac{3}{x^2+2}$无最小值，D错误．故选：C.

8．D　【解析】设$g(x)=\frac{f(x)-1}{e^x}$．因为$f(x)>f'(x)+1$，即$f'(x)-f(x)+1<0$，所以$g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)+1}{e^x}<0$，所以$g(x)$在**R**上单调递减．又因为$f(0)=2023$，所以不等式$e^{-x}f(x)>e^{-x}+2022 \Leftrightarrow \frac{f(x)-1}{e^x}>2022=f(0)-1=\frac{f(0)-1}{e^0}$，即$g(x)>g(0)$，所以$x<0$，所以满足题中不等式的$x$的取值范围为$(-\infty，0)$．故选：D．

二、多选题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

9．AD　【解析】A 选项：$\left(\sin^2 x\right)'=2\sin x\cos x=\sin 2x$，A 正确；

B 选项：$(3^x+\log_3 x)'=3^x\ln 3+\frac{1}{x\ln 3}$，B 错误；

C 选项：$\left(e^x\sqrt{x}\right)'=e^x\cdot\sqrt{x}+e^x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$，C 错误；

D 选项：$\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$，D 正确．故选：AD．

10．BCD　【解析】因为x_0满足关于x的方程$2ax+b=0$，所以$x_0=-\frac{b}{2a}$，所以$f(x)=ax^2+bx+c$在x_0处取得最小值．

由 A 选项，得$f(x)$在x_0处取得最大值，A 选项为假命题；

由 B 选项，得$f(x)$在x_0处取得最小值，B 选项为真命题；

C 选项，当$x=x_0$时，$f(x)=f(x_0)$，C 选项为真命题；

D 选项，因为$f(x)$在x_0处取得最小值，所以$\exists x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geq f(x_0)$是真命题．故选：BCD．

11．CD　【解析】若函数$f(x)$和$g(x)$之间存在隔离直线$y=4x-b$，

则对任意的$x>0$，$f(x)=x^2\geq 4x-b$，即$x^2-4x+b\geq 0$，

所以$\varDelta=16-4b\leq 0$，解得$b\geq 4$；

对任意的$x>0$，$g(x)=-\frac{4}{x}\leq 4x-b$，则$b\leq 4x+\frac{4}{x}$．

因为$4x+\frac{4}{x}\geq 2\sqrt{4x\cdot\frac{4}{x}}=8$，当且仅当$x=1$时，等号成立，所以$b\leq 8$，

所以$4\leq b\leq 8$，所以实数b的取值可以是 4 或 7．故选：CD．

12．ACD　【解析】因为 $a_{11}=2$，$a_{13}=2m^2$，$a_{61}=2+5m$，所以 $2m^2=2+5m+1$，解得 $m=3$ 或 $m=-\frac{1}{2}$（舍去），A 正确；

所以$a_{ij}=a_{i1}\cdot 3^{j-1}=[a_{11}+(i-1)\cdot m]\cdot 3^{j-1}=(3i-1)\cdot 3^{j-1}$，C 正确；

所以 $a_{67}=(3\times 6-1)\times 3^{7-1}=17\times 3^6$，B 错误；

所以 $S=(a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{1n})+(a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{2n})+\cdots+(a_{n1}+a_{n2}+a_{n3}+\cdots+a_{nn})$

$=\frac{a_{11}(1-3^n)}{1-3}+\frac{a_{21}(1-3^n)}{1-3}+\cdots+\frac{a_{n1}(1-3^n)}{1-3}$

$=\frac{1}{2}(3^n-1)\cdot\frac{(2+3n-1)n}{2}$

$=\frac{1}{4}n(3n+1)(3^n-1)$，D 正确．故选：ACD．

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13．0.16　【解析】该品种小麦的穗粒数超过 42 粒的概率$P(X>42)=\frac{1-P(34\le X\le 42)}{2}=\frac{1-0.68}{2}=0.16$．故答案为：0.16．

14．$\{-1，2，5\}$　【解析】$(x^2-4x)^2-(x^2-4x)-20=(x^2-4x-5)(x^2-4x+4)=(x-5)(x+1)(x-2)^2=0$，所以$x=5$或$x=-1$或$x=2$，故该方程的解集为$\{-1，2，5\}$．故答案为：$\{-1，2，5\}$．

15．6　【解析】设每瓶饮料获得的利润为$f(r)$．根据题意，得$f(r)=0.4\times\frac{4}{3}\pi r^3-1.6\pi r^2=\frac{8\pi r^3-24\pi r^2}{15}(0<r\le 6)$，则$f'(r)=\frac{8\pi r}{5}(r-2)$，于是当$0<r<2$时，$f'(r)<0$，$f(r)$单调递减；当$2<r\le 6$时，$f'(r)>0$，$f(r)$单调递增，$r=2$是极小值点，所以当$r=6$时，$f(r)$取得最大值．故答案为：6．

16．248　【解析】$f(x+1)+g(x-2)=3$①．

因为$g(x-1)$为偶函数，所以$g(-x-1)=g(x-1)$．

用$x-1$替换 x，得$g(-x)=g(x-2)$，

所以$f(x-1)-g(-x)=1$可化为$f(x-1)-g(x-2)=1$②．

由①+②，得$f(x+1)+f(x-1)=4$，进而得$f(x)=f(x+4)$，

所以$\sum_{k=1}^{83}f(k)=41\times 4+f(2)=164+f(2)$．

在②中用$x+2$替换 x，得$f(x+1)-g(x)=1$③．

由①-③，得$g(x-2)+g(x)=2$，进而得$g(x)=g(x+4)$，

所以$\sum_{k=1}^{83}g(k)=41\times 2+g(2)=82+g(2)$．

在①中令$x=1$，可得$f(2)+g(-1)=3$，所以$f(2)=1$．

在$g(-x-1)=g(x-1)$中，令$x=1$，得$g(-2)=g(0)$．

又因为$g(-2)+g(0)=2$，所以$g(0)=g(-2)=1$，则$g(2)=1$，

所以$\sum_{k=1}^{83}[f(k)+g(k)]=164+82+f(2)+g(2)=248$．故答案为：248．

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分）

规范解答	评分细则
17．解：（1）由$S_1=a_1=2a_1-3$，解得$a_1=3$．……………………………1 分 因为$a_n=2a_{n-1}-2$， 所以$a_n-2=2(a_{n-1}-2)(n\ge 2)$． 又$a_1-2=1$，所以数列$\{a_n-2\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列， 所以$a_n-2=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$，　……………………………………………………4 分 所以$a_n=2^{n-1}+2$．　…………………………………………………………………5 分	

（2）由（1）得$a_n-2=2^{n-1}$，所以$a_{n+1}-2=2^n$，

所以$b_n=\log_2(a_{n+1}-2)=n$，　……………………………………………7 分

所以$T_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(1+n)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$.　……………………………10 分

18．解：（1）由题设可知，$P(B_0)=0.8$，$P(B_1)=0.1$，$P(B_2)=0.1$，

且$P(A|B_0)=1$，$P(A|B_1)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\frac{4}{5}$，$P(A|B_2)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{12}{19}$，

所以$P(A)=P(B_0)P(A|B_0)+P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=0.8\times1+0.1\times\frac{4}{5}+0.1\times\frac{12}{19}=\frac{448}{475}$，

即顾客买下所查看的一箱玻璃杯的概率为$\frac{448}{475}$.　……………………………7 分

直接列式计算的，正确即可得分.

（2）因为$P(B_0|A)=\frac{P(B_0)P(A|B_0)}{P(A)}=\frac{0.8\times1}{\frac{448}{475}}=\frac{95}{112}$，

所以在顾客买下的一箱中，没有残次品的概率是$\frac{95}{112}$.　……………………12 分

直接列式计算的，正确即可得分.

19．解：（1）由$f(x)=(x-a)^3$，得$f'(x)=3(x-a)^2$，

所以$\begin{cases}3(2-a)^2=3,\\3(-2-a)^2=27,\end{cases}$　解得$a=1$，

所以函数$f(x)$的解析式为$f(x)=(x-1)^3$.　……………………………………4 分

（2）因为$f\left(\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{5}{3}-1\right)^3\neq0$，

所以点$M\left(\frac{5}{3},0\right)$不在函数$f(x)$的图象上，即其不是切点，则设切点为$(x_0,y_0)$.

$f'(x)=3(x-1)^2$，则该切线的斜率为$k=3(x_0-1)^2$.　…………………………6 分

又因为该切线过点$M\left(\frac{5}{3},0\right)$，

所以$k=\frac{(x_0-1)^3-0}{x_0-\frac{5}{3}}=3(x_0-1)^2$，解得$x_0=1$或$x_0=2$.　…………………9 分

漏掉 1 种情况扣 2 分.

当$x_0=1$时，$k=0$，此时切线方程为$y=0$；

当$x_0=2$时，$k=3$，此时切线方程为$y=3\left(x-\frac{5}{3}\right)$，即$3x-y-5=0$.

综上所述，该切线的一般式方程为$y=0$或$3x-y-5=0$.　……………12 分

20．（1）解：由$a_{n+1}-a_n=b_n$，

得$a_2-a_1=b_1$，$a_3-a_2=b_2$，…，$a_n-a_{n-1}=b_{n-1}$，

累加可得：$a_n-a_1=b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}$，　……………………………………2 分

所以$a_n=a_1+(n-1)\times(-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\times2$

$=n^2-4n+3+a_1$

$=(n-2)^2+a_1-1$，

当a_n取最小值时，n的值为 2.　…………………………………………5 分

（2）证明：若$a_1=\frac{3}{4}$，则$\frac{1}{a_1}=\frac{4}{3}$，$a_n=n^2-4n+\frac{15}{4}=\left(n-\frac{5}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)$，

或$a_n=\frac{(2n-5)(2n-3)}{4}$.

所以$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}}+\cdots+\frac{1}{\left(n-\frac{5}{2}\right)\times\left(n-\frac{3}{2}\right)}$

$=\left(\frac{1}{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{-\frac{1}{2}}\right)+\left(\frac{1}{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)+\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{\frac{3}{2}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-\frac{5}{2}}-\frac{1}{n-\frac{3}{2}}\right)$

$=-\frac{2}{3}-\frac{2}{2n-3}$. ……………………………………10 分

当$n\geq 2$时，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<0$，

所以$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\leq\frac{1}{a_1}=\frac{4}{3}$. ……………………………………12 分

21．解：（1）由题意，得$a=30$，$b=90$，$c=120$，$d=60$，$n=30+90+120+60=300$，

未写出 a，b，c，d 的值，但代入正确、计算正确即可得分.

所以$a+b=120$，$c+d=180$，$a+c=150$，$b+d=150$，

所以$\chi^2=\frac{300\times(30\times60-120\times90)^2}{120\times180\times150\times150}=50$. ……………………………2 分

因为$50>10.828$，……………………………………3 分

所以在犯错误的概率不超过 0.1%的前提下，可以认为对A，B两条路线的选择与性别有关. ……………………………………4 分

只结论错误，扣 1 分.

（2）A 路线的好评率为$\frac{100}{150}=\frac{2}{3}$，一般评率为$\frac{1}{3}$.

B 路线的好评率为$\frac{75}{150}=\frac{1}{2}$，一般评率为$\frac{1}{2}$. ……………………………5 分

设 A 路线和 B 路线累计分数分别为X，Y，

则X，Y的可能取值都为6，9，12，15，

则$P(X=6)=C_3^0\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，

$P(X=9)=C_3^1\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{6}{27}$，

$P(X=12)=C_3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{12}{27}$，

$P(X=15)=C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$，

所以$E(X)=\frac{1}{27}\times6+\frac{6}{27}\times9+\frac{12}{27}\times12+\frac{8}{27}\times15=12$. ………………………8 分

计算正确，均可得分.

$P(Y=6)=C_3^0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，

$P(Y=9)=C_3^1\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$，

$P(Y=12)=C_3^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$，

$P(Y=15)=C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，

所以$E(Y)=\frac{1}{8}\times6+\frac{3}{8}\times9+\frac{3}{8}\times12+\frac{1}{8}\times15=10.5$. ………………………11 分

因为$E(X)>E(Y)$，所以这个人会选择A路线. ……………………………12 分

22．（1）解：$g(x)=f(x)+x^2=2\mathrm{e}^x-2ax-a^2$，则$g'(x)=2\mathrm{e}^x-2a$．

令$g'(x)=0$，则$x=\ln a$．　……………………………………………………1 分

当$x<\ln a$时，$g'(x)<0$；

当$x>\ln a$时，$g'(x)>0$，

所以$g(x)$在$(-\infty，\ln a)$上单调递减，在$(\ln a，+\infty)$上单调递增，………2 分

所以$g(x)$在$x=\ln a$处取得极小值．…………………………………………3 分

（2）证明：当$x\geq 0$时，因为$f'(x)=2\mathrm{e}^x-2x-2a$，

令$h(x)=2\mathrm{e}^x-2x-2a$，则$h'(x)=2\mathrm{e}^x-2\geq 0$，

故$f'(x)$在$[0，+\infty)$单调递增．……………………………………………5 分

当$a=1$时，$f'(x)=2\mathrm{e}^x-2x-2\geq f'(0)=0$，……………………………6 分

故$f(x)$在$[0，+\infty)$单调递增，则$f(x)\geq f(0)=1>0$．……………………7 分

（3）证明：由（2）可知$f'(x)$在$[0，+\infty)$上单调递增，$f'(0)=2-2a$．

①当$a\in[-\sqrt{2}，1]$时，$f'(x)\geq f'(0)=2-2a\geq 0$，

故$f(x)$在$[0，+\infty)$单调递增，

所以$f(x)\geq f(0)=2-a^2\geq 0$；…………………………………………………8 分

②当$a\in(1，2-\ln 2]$时，$f'(0)=2-2a<0$．

因为$f'(1)=2\mathrm{e}-2-2a>0$，

故存在$x_0\in(0，1)$使得$f'(x_0)=2\mathrm{e}^{x_0}-2x_0-2a=0$（*）．

又因为$f'(x)$在$[0，+\infty)$单调递增，

所以当$0\leq x<x_0$时，$f'(x)<0$；

当$x>x_0$时，$f'(x)>0$，

所以$f(x)$在$[0，x_0)$上单调递减，在$(x_0，+\infty)$上单调递增，

故$f(x)_{\min}=f(x_0)=2\mathrm{e}^{x_0}-x_0^2-2ax_0-a^2$．…………………………10 分

由（*）得$a=\mathrm{e}^{x_0}-x_0$，代入上式，

得$f(x_0)=2\mathrm{e}^{x_0}-x_0^2-2(\mathrm{e}^{x_0}-x_0)x_0-(\mathrm{e}^{x_0}-x_0)^2=\mathrm{e}^{x_0}(2-\mathrm{e}^{x_0})$．

因为$a=\mathrm{e}^{x_0}-x_0\leq 2-\ln 2$，令$g(x)=\mathrm{e}^x-x$，

所以$g(x_0)\leq g(\ln 2)$，$g'(x)=\mathrm{e}^x-1$．

当$x\geq 0$时，$g'(x)\geq 0$，

所以$g(x)$在$[0，+\infty)$上单调递增，

所以$0<x_0\leq\ln 2$，…………………………………………………………11 分

所以$2-\mathrm{e}^{x_0}\geq 0$，则$f(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}(2-\mathrm{e}^{x_0})\geq 0$，

所以当$x\geq 0$时，$f(x)_{\min}\geq 0$，即$f(x)\geq 0$得证．…………………12 分

参考关键步骤的赋分，合理给分即可．