2022~2023 学年度下期高 2024 届半期考试

数学试卷（文科）（参考答案）

一、选择题（每小题 5 分，共 60 分）

BCADB　ADCDB　AC

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13．i　　14．$2\sqrt{3}$　　15．$(0,+\infty)$　　16．①③④

三、解答题（共 70 分）

17．解：（Ⅰ）由 $\rho^2=x^2+y^2,\rho\cos\theta=x$，　　……………2 分

得：$x^2+y^2=4x-3$，

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $(x-2)^2+y^2=1$，　　……………5 分

（Ⅱ）设 $B(\rho,\theta)$，则由题意可知 $A(2\rho,\theta)$，

将 A,B 坐标代入方程 $\rho^2=4\rho\cos\theta-3$ 得：$\begin{cases}4\rho^2=8\rho\cos\theta-3\\\rho^2=4\rho\cos\theta-3\end{cases}$，

$\therefore 4\rho^2-2\rho^2=3$，得 $\rho=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，　　……………8 分

$\therefore B$ 的极径为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$．　　……………10 分

18.解：（Ⅰ）由题中数据可得 $\overline{y}=42$，　　……………2 分

设生产成本 y 关于蛋白质含量 x 的回归方程为 $y=\hat{b}x+\hat{a}$，

$$\because \hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{81.41}{6.79}=11.99，$$　　……………4 分

$\therefore \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\cdot\overline{x}=42-11.99\times1.68=21.86$，

所以回归方程为 $y=11.99x+21.86$，　　……………6 分

（Ⅱ）当 $y=60$ 时，由（1）得 $11.99x+21.86=60$．

解得 $x\approx3.18$，　　……………8 分

当 $y=70$ 时，由（1）得 $11.99x+21.86=70$．

解得 $x\approx4.02$，　　……………10 分

所以生产的乳制品蛋白质含量的取值范围为 $[3.18,4.02]$．　　……………12 分

19．解：（Ⅰ）$f'(x)=e^x(x^2-ax-a+2x-a)=e^x(x+2)(x-a)$，

$\because x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，

$\therefore\ f'(1)=e(1+2)(1-a)=0$，

解得 $a=1$，　　　　　　　　　　　　…………3 分

当 $x\in(-2,1)$ 时， $f'(x)<0$，$\therefore\ f(x)$ 在 $(-2,1)$ 上递减，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$，$\therefore\ f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增，

$\therefore\ x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点；　　　　　　　　…………6 分

（Ⅱ）$\because\ f'(x)=e^x(x+2)(x-a)$，

①当 $a=-2$ 时， $f'(x)=e^x(x+2)^2\geq 0$ 在 R 上恒成立，

所以函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增，

②当 $a<-2$ 时，令 $f'(x)\geq 0$，解得 $x<a$ 或 $x>-2$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递增，在 $(a,-2)$ 上单调递减，在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，

③当 $a>-2$ 时，令 $f'(x)\geq 0$，解得 $x<-2$ 或 $x>a$，

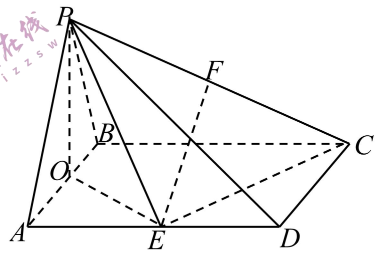
所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递增，在 $(-2,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，…………11 分

综上，当 $a=-2$ 时，函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增，

当 $a<-2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$，$(-2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(a,-2)$ 上单调递减，

当 $a>-2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$，$(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-2,a)$ 上单调递减；…………12 分

20.解（Ⅰ）取 AB 中点 O，连接 PO、OE，



由题知 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore\ \angle PEO$ 为 PE 与平面 $ABCD$ 所成角，　　　…………2 分

$\therefore\ \angle PEO=45^\circ$，即 $OE=OP=\sqrt{3}$，

$\therefore\ PE^2=PO^2+OE^2=6$　　　　　　…………4 分

又 $\because\ AE^2=OE^2-AO^2=2$

所以 $DE=\sqrt{2}$

在 $Rt\Delta CDE$ 中 $EC^2=DE^2+CD^2=6$，

$\therefore\ EP=EC$；　　　　　　　　　…………6 分

（Ⅱ）在 ΔPEC 中，PE=EC，取 PC 的中点 F，

所以 $EF\perp PC$，　　　　　　　　　　…………8 分

取 PB 中点 G，连接 AG，易得 $EF//AG$，又 $AG\perp PB$

所以 $EF\perp PB$，且 $PC\cap PB=P$

$\therefore\ EF\perp$ 平面 PBC，　　　　　　　　…………10 分

又 $EF\subseteq$ 平面 PEC，

所以平面 $PCE\perp$ 平面 PBC．　　　　　　…………12 分

21．解：（1）设直线 AB 方程为 $y=kx+2$， $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases} y=kx+2 \\ x^2=4y \end{cases} \Rightarrow x^2-4kx-8=0$，$\therefore x_1+x_2=4k, x_1x_2=-8$，…………2 分

$\therefore N(2k,k^2)$，…………3 分

函数$y=\dfrac{x^2}{4}$的导函数为$y'=\dfrac{x}{2}$，

所以抛物线在N点处的切线的斜率为$\dfrac{2k}{2}$，

$\therefore \dfrac{2k}{2}=2$，即$k=1$

$\therefore l_{AB}: y=x+2$；…………5 分

（2）由（1）问可得$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{16k^2+32}$，

点$N(2k,k^2)$到直线AB的距离为$\dfrac{|k^2+2|}{\sqrt{1+k^2}}$，

点$D(0,11)$到直线AB的距离为$\dfrac{9}{\sqrt{1+k^2}}$，

$\therefore S=S_{\Delta DAB}-S_{\Delta NAB}=18\sqrt{k^2+2}-2\sqrt{k^2+2}\cdot(k^2+2)$，…………8 分

令$t=\sqrt{k^2+2}\ge\sqrt{2}$，

$\therefore S=18t-2t^3$，令函数$f(t)=18t-2t^3$

$f'(t)=18-6t^2=6(3-t^2)$，

所以函数$f(t)$在区间$[\sqrt{2},\sqrt{3}]$上递增，在$[\sqrt{3},+\infty)$上递减，

$\therefore t=\sqrt{3}$，即$k=\pm1$时，ΔDAB与ΔNAB面积之差取得最大值$12\sqrt{3}$．…………12 分

22．解：（Ⅰ）$f'(x)=\dfrac{1}{x}+ax-(a+2)=\dfrac{ax^2-(a+2)x+1}{x}$，

$\because \Delta=(a+2)^2-4a=a^2+4>0$，且$a\ge1$，

$\therefore ax^2-(a+2)x+1=0$在$(0,+\infty)$上有两个不同的根$x_1,x_2$，

据题可得$ax^2-(a+2)x+1\le0$的解集为$[x_1,x_2]$，

$x_1+x_2=1+\dfrac{2}{a}, x_1x_2=\dfrac{1}{a}$，

$\therefore x_2-x_1=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+\dfrac{4}{a^2}}\le\sqrt{5}$

所以x_2-x_1的最大值为$\sqrt{5}$．

（Ⅱ）$f'(1)=-1$，

所以直线$l: y=-x+2$，

又直线l与曲线 C 有且仅有一个公共点，

$\therefore \ln x+\frac{1}{2}ax^2-(a+2)x+\frac{1}{2}a+3=-x+2$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一根 $x=1$

令函数 $g(x)=\ln x+\frac{1}{2}ax^2-(a+1)x+\frac{1}{2}a+1$，

$g'(x)=\frac{1}{x}+ax-(a+1)=\frac{ax^2-(a+1)x+1}{x}=\frac{(x-1)(ax-1)}{x}$，

当 $a=1$ 时，函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $g(1)=0$，满足条件，

当 $a>1$ 时，函数 $g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{a},1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

当 $x\to 0$ 时，$g(x)\to -\infty$，所以 $\exists x_0\in(0,\frac{1}{a})$，使 $g(x_0)=0$，所以不满足条件，

综上得 a 满足的条件为 $a=1$.