绝密★启用前

湘豫名校联考(2021年1月)

数学(理科)试卷

注意事项：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。时量120分钟，满分150分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答第Ⅰ卷时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。

3. 回答第Ⅱ卷时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷

一、选择题(本题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.)

1. 将下列各式的运算结果在复平面中表示，在第四象限的为

A. $\frac{1+i}{i}$　　B. $\frac{1+i}{-i}$　　C. $\frac{1-i}{i}$　　D. $\frac{1-i}{-i}$

2. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{x|x^2-x-2<0\}$，则 $A\cap(\complement_U B)=$

A. $\{-2,2\}$　　B. $\{-2,-1,2\}$

C. $\{-2\}$　　D. $\{0,1\}$

3. 张先生去某城市参加学术会议，拟选择在会议中心附近的 A、B 两酒店中的一个入住.两酒店条件和价格相当，张先生在网上查看了最近入住两个酒店的客人对两酒店的综合评分，并将评分数据记录为如右的茎叶图.记 A、B 两酒店的综合评分数据的均值为 $\bar{x}_A$，$\bar{x}_B$，方差为 S_A^2，S_B^2，若以此为依据，下述判断较合理的是

A		B
2	7	4 3
6 7 9	8	8 6
2 4	9	5 4

A. 因为 $\bar{x}_A>\bar{x}_B$，$S_A^2>S_B^2$，应选择 A 酒店　　B. 因为 $\bar{x}_A>\bar{x}_B$，$S_A^2<S_B^2$，应选择 A 酒店

C. 因为 $\bar{x}_A<\bar{x}_B$，$S_A^2>S_B^2$，应选择 B 酒店　　D. 因为 $\bar{x}_A<\bar{x}_B$，$S_A^2<S_B^2$，应选择 B 酒店

4. 已知 $a=\log_2\pi$，$b=\ln\pi$，$c=3^{-0.9}$，则 a,b,c 的大小关系为

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $c<b<a$　　D. $c<a<b$

5. 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 的直线与抛物线相交于 A，B 两点，$|AB|=6$，弦 AB 中点 P 的横坐标 $x_P=2$，则该抛物线的方程为

A. $y^2=2x$　　B. $y^2=4x$　　C. $y^2=6x$　　D. $y^2=8x$

6.《巴黎协定》是2015年12月12日在巴黎气候变化大会通过，2016年4月22日在纽约签署的气候变化协定，该协定为2020年后的全球应对气候变化行动作出安排.中国政府一直致力积极推动《巴黎气候》协定的全面有效落实.某工厂产生的废气经过过滤后

排放，排放时污染物的含量不得超过 1%. 已知在过滤过程中污染物的数量 P（单位：毫克/升）与过滤时间 t（单位：时）之间的函数关系式为 $P=P_0e^{-kt}$（k，P_0 均为正常数）. 如果前 5 小时的过滤过程中污染物被排除了 90%，那么排放前至少还需要过滤的时间是

A. $\frac{1}{2}$ 小时　　B. $\frac{5}{9}$ 小时　　C. 5 小时　　D. 10 小时

7. 函数 $g(x)$ 的图象是由函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin 2x+\sqrt{2}\cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到的，则下列关于函数 $g(x)$ 的说法正确的是

A. $g(x)$ 为奇函数　　B. $g(x)$ 为偶函数

C. $g(x)$ 的图象的一条对称轴为 $x=\frac{7}{8}\pi$　　D. $g(x)$ 的图象的一个对称中心为 $\left(\frac{3\pi}{8},0\right)$

8. $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中仅有第 4 项的二项式系数最大，则它的展开式中的常数项为

A. -20　　B. 20　　C. -15　　D. 15

9. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线与函数 $f(x)=-\ln(x+1)$ 的图象相切，则该双曲线离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

10. 在 $\triangle ABC$ 中，由角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $c=2(a\cos B-b\cos A)$，则 $\tan(A-B)$ 的最大值为

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 1　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

11. 已知矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=3$，E，F 分别为边 AB 和 CD 上的动点（不与端点重合），且 $EF\parallel AD$，将四边形 $ADFE$ 沿 EF 折起，使平面 $ADFE\perp$ 平面 $BCFE$，连接 AB，CD，当三棱柱 $ABE-DCF$ 的体积最大时，该三棱柱的外接球体积为

A. $\frac{68\sqrt{17}}{3}\pi$　　B. $\frac{52\sqrt{13}}{3}\pi$　　C. $\frac{17\sqrt{17}}{6}\pi$　　D. $13\sqrt{13}\pi$

12. 函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 (a,b) 成中心对称的充要条件是函数 $y=f(x+a)-b$ 为奇函数. 由此结论可求 $f(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\cdots+\frac{x+2020}{x+2021}$ 的对称中心为

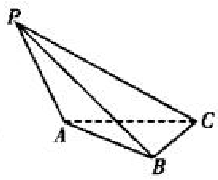
A. $(1011,1011)$　　B. $(-1011,2021)$　　C. $\left(\frac{1}{1011},2021\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{2022},1011\right)$

第Ⅱ卷

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13. 若单位向量 e_1，e_2 的夹角为 120°，则 $|e_1-e_2|=$________.

14. 若 $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，则 $\sin 126°=$________.



15. 如图，三棱锥 $P-ABC$ 的底面 ABC 是等腰直角三角形，$\angle ACB=90°$，且 $PA=PB=AB=\sqrt{2}$，$PC=\sqrt{3}$，则点 C 到平面 PAB 的距离等于________.

16. 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C_1: x^2+\frac{y^2}{4}=1$，双曲线 $C_2: \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$，$P$,$Q$ 分别为 C_1,C_2 上的动点，且 $\angle POQ=90°$，则 $|PQ|$ 的最小值为________.

三、解答题（共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.）

（一）必考题：共 60 分

17.（本小题满分 12 分）

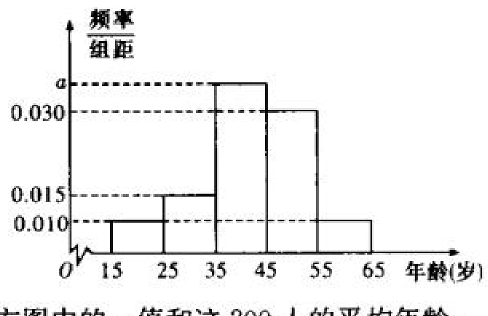
已知公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，且 a_1,a_2,a_4 成等比数列，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(1)求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2)在平面直角坐标系 xOy 中，记点 $P_1(a_1,-b_1)$，$P_2(a_2,b_2)$，…，$P_n(a_n,(-1)^n b_n)$，设 P_nP_{n+1} 所在的直线与 x 轴交于点 Q_n，$T_n=|OQ_1|+|OQ_2|+\cdots+|OQ_n|$，求 T_n.

18.（本小题满分 12 分）

为激活国内消费市场，挽回疫情造成的损失，国家出台一系列的促进国内消费的优惠政策，某机构从某一电商的线上交易大数据中来跟踪调查消费者的购买力，界定 3 至 8 月份购买商品在 5000 元以上人群属“购买力强人群”，购买商品在 5000 元以下人群属“购买力弱人群”. 现从电商平台消费人群中随机选出 200 人，发现这 200 人中属购买力强的人数占 80%，并将这 200 人按年龄分组，记第 1 组[15,25)，第 2 组[25,35)，第 3 组[35,45)，第 4 组[45,55)，第 5 组[55,65)，得到频率分布直方图，如图.



(1)求出频率分布直方图中的 a 值和这 200 人的平均年龄；

(2)从第 1,2 组中用分层抽样的方法抽取 5 人，并再从这 5 人中随机抽取 2 人进行电话回访，求这两人恰好属于不同组别的概率；

(3)把年龄在第 1,2,3 组的居民称为青少年组，年龄在第 4,5 组的居民称为中老年组，若选出的 200 人中“购买力弱人群”的中老年人有 20 人，问是否有 99%的把握认为是否属“购买力强人群”与年龄有关？

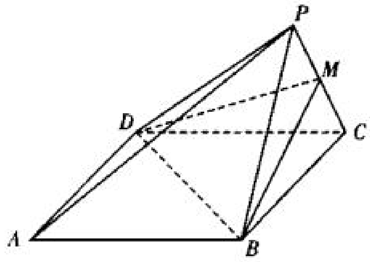
附：

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.150	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，M 为 PC 的中点.



(1)求证：AP∥平面 BDM；

(2)若 $PB=PC=\sqrt{2}$，$CD\perp PC$，求二面角 $C-DM-B$ 的余弦值.

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，点 F_1,F_2 分别为其左、右焦点，点 A,B 分别为其左、右顶点，点 Q 为椭圆上不与 A,B 重合的动点，且 $\triangle QAF_1$ 面积的最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)分别过点 A,B 作直线 $l_1\perp AQ$ 于点 A，$l_2\perp BQ$ 于点 B，设 l_1 与 l_2 相交于点 P，求点 P 的轨迹方程.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\ln x, g(x)=x+\frac{1}{x}(x>0)$.

(1)若 $F(x)=f(x)+g(x)$,求 $F(x)$ 的单调区间;

(2)若 $G(x)=2g(x)\cdot f(x)$,有 $G(x)\leqslant me^{mx}+m$ 恒成立,求实数 m 的取值范围.

(二)选考题.请考生在第 22~23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22.(本小题满分 10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y=\frac{1}{2}t \end{cases}$ (t 为参数).以坐标原点为极点,x 轴的正半轴为极轴,建立极坐标系,直线 l_2 的极坐标方程为 $2\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+3=0$,$l_2$ 交极轴于点 A,交直线 l_1 于 B 点.

(1)求 A,B 点的极坐标方程;

(2)若点 P 为椭圆 $\frac{y^2}{3}+x^2=1$ 上的一个动点,求 $\triangle PAB$ 面积的最大值及取最大值时点 P 的直角坐标.

23.(本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=|2x-1|+|x+m|(m\in\mathbf{R})$.

(1)若 $m=1$,解不等式 $f(x)\leqslant 6$;

(2)若关于 x 的不等式 $f(x)\leqslant|2x+1|$ 在 $\left[\frac{3}{4},2\right]$ 上恒成立,求实数 m 的取值范围.

湘豫名校联考(2021年1月)

数学(理科)参考答案

一、选择题(本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求.)

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答　案	A	B	B	C	B	C	C	D	A	D	C	B

1. A **【解析】**由$\frac{1+i}{i}=1-i$在第四象限,故选A.

2. B **【解析】**由$B=\{x|x^2-x-2<0\}$得$B=(-1,2)$,所以$\complement_U B=(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$,
所以$A\cap(\complement_U B)=\{-2,-1,2\}$.

3. B **【解析】**由$\overline{x}_A=86.67$,$\overline{x}_B=85$,$S_A^2=50.56$,$S_B^2=76$,故选B.

4. C **【解析】**易知$c=3^{-0.9}<1$,$b=\ln\pi>1$,又$b=\frac{1}{\log_\pi e}$,$a=\frac{1}{\log_\pi 2}$,而$0<\log_\pi 2<\log_\pi e<1$,有$a>b>1$,则$c<b<a$.
故选C.

5. B **【解析】**设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由抛物线定义知:$x_1+x_2+p=6$,
又$x_P=\frac{x_1+x_2}{2}=2$,即$p=2$,故抛物线方程为$y^2=4x$.

6. C **【解析】**由题知:当$t=0$时,$P=P_0$,所以$(1-90\%)P_0=P_0\cdot e^{-5k}$,即$e^{-5k}=0.1$,
由$0.01P_0=P_0\cdot e^{-kt}$,即$(e^{-5k})^2=e^{-kt}$,解得$t=10$,即还需5小时,故选C.

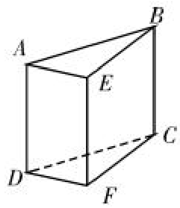
7. C **【解析】**由题知:$g(x)=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$. 当$x=\frac{7}{8}\pi$时,$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$,易知C正确.

8. D **【解析】**$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^n$的展开式中,仅有第4项的二项式系数最大,即$C_n^3$最大,所以$n=6$,
所以展开式的通项公式为$T_{r+1}=C_6^r\cdot(x^2)^{6-r}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^r\cdot C_6^r\cdot x^{12-3r}$,
令$12-3r=0$,得$r=4$,故展开式中的常数项为$(-1)^4\cdot C_6^4=15$.

9. A **【解析】**易知切点为原点,又$f(x)=-\ln(x+1)$的导函数$f'(x)=-\frac{1}{x+1}$,
故$f'(0)=-\frac{1}{0+1}=-1$,$-\frac{b}{a}=-1$,$\frac{b}{a}=1$,
又$\frac{c^2-a^2}{a^2}=1$,则$e=\sqrt{2}$. 故选A.

10. D **【解析】**由正弦定理:$2\sin A\cdot\cos B-2\sin B\cdot\cos A=\sin C=\sin(A+B)$.
化简得$\tan A=3\tan B$,故$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\cdot\tan B}=\frac{2\tan B}{1+3\tan^2 B}=\frac{2}{\frac{1}{\tan B}+3\tan B}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$.
当且仅当$\tan B=\frac{\sqrt{3}}{3}$,即$B=\frac{\pi}{6}$,$C=\frac{\pi}{2}$,$A=\frac{\pi}{3}$时取"=". 故选D.

11. C **【解析】**设$AE=x$,则$BE=4-x$,折得的几何体为三棱柱,故$V_{AEB-DFC}=\frac{1}{2}x(4-x)\cdot 3$.
当且仅当$x=2$时,$V_{AEB-DFC}$的体积最大.
此时外接球直径为$BD=\sqrt{4+4+9}=\sqrt{17}$,
故外接球体积$V_{球}=\frac{4\pi r^3}{3}=\frac{17\sqrt{17}}{6}\pi$.



12. B 【解析】由题知，设 $f(x)$ 的对称中心为 (a,b)，

则 $y=f(x+a)-b$ 为奇函数.

即 $[f(-x+a)-b]+[f(x+a)-b]=0$，即 $f(x+a)+f(-x+a)-2b=0$.

又 $f(x)=2021-\left(\frac{1}{x+1}+\cdots+\frac{1}{x+2021}\right)$，

$f(x+a)=2021-\left(\frac{1}{x+a+1}+\cdots+\frac{1}{x+a+2021}\right)$，

$f(-x+a)=2021-\left(\frac{1}{-x+a+1}+\cdots+\frac{1}{-x+a+2021}\right)=2021-\left(\frac{1}{-x+a+2021}+\cdots+\frac{1}{-x+a+1}\right)$，

则 $f(x+a)+f(-x+a)-2b=4042-\left(\frac{2a+2022}{(x+a+1)(-x+a+2021)}+\cdots+\frac{2a+2022}{(-x+a+1)(x+a+2021)}\right)-$

$2b=0$ 恒成立，

则 $\begin{cases}b=2021,\\a=-1011.\end{cases}$ 故选 B.

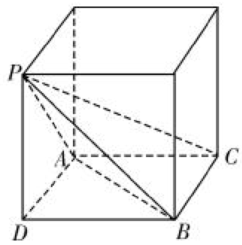
二、填空题(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.)

13. $\sqrt{3}$ 【解析】$|\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2|^2=1+1+2\times1\times1\times\frac{1}{2}=3$，故 $|\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2|=\sqrt{3}$.

14. $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ 【解析】$\sin 126°=\sin(90°+36°)=\cos 36°=1-2\sin^2 18°=1-2\times\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$

$=1-2\times\frac{6-2\sqrt{5}}{16}=\frac{2+2\sqrt{5}}{8}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

15. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 【解析】由题意，可将三棱锥 $P-ABC$ 补全为边长为 1 的正方体如图所示，



$PA=PB=AB=\sqrt{2}$，$AC=BC=PD=1$，

设点 C 到平面 PAB 的距离为 h，

则由 $V_{P-ABC}=V_{C-PAB}$ 得 $\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PD=\frac{1}{3}S_{\triangle PAB}\cdot h$，

所以 $h=\frac{S_{\triangle ABC}\cdot PD}{S_{\triangle PAB}}=\frac{\frac{1}{2}\times1\times1\times1}{\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

16. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 【解析】①当直线 OQ 与 x 轴重合时，$|OQ|=\sqrt{2}$，$|OP|=2$，此时 $|PQ|=\sqrt{|OQ|^2+|OP|^2}=\sqrt{6}$；

②当直线 OQ 不与 x 轴重合时，设为 $y=kx$（$|k|<\sqrt{2}$），则直线 OP 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x$，

$\begin{cases}y=kx,\\\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1\end{cases}\Rightarrow|OQ|^2=\frac{4(k^2+1)}{2-k^2}$，$\begin{cases}y=-\frac{1}{k}x,\\x^2+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}\Rightarrow|OP|^2=\frac{4(k^2+1)}{4k^2+1}$.

则 $\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{3(k^2+1)}{4(k^2+1)}=\frac{3}{4}$. 所以 $|PQ|^2=|OP|^2+|OQ|^2=\frac{4}{3}(|OP|^2+|OQ|^2)\cdot$

$\left(\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}\right)\geqslant\frac{16}{3}$，当 $k^2=\frac{1}{3}$ 时等号成立，又 $6>\frac{16}{3}$，所以 $|PQ|$ 最小值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

三、解答题(共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.)

17.【解析】(1)由题知，$\{a_n\}$ 为等差数列，设其公差为 $d(d\neq0)$.

由 $a_2^2=a_1\cdot a_4$，得 $(1+d)^2=1+3d$，解得 $d=1$.

故 $a_n=n$. ………………………………………………………………………… 3 分

又 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$n=1$ 时，$b_1=S_1=\frac{1}{2}$，

$n\geqslant 2$ 时，$b_n=S_n-S_{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b_1 也符合上式，故 $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

即：$a_n=n,b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$. ………………………………………………………… 6 分

(2)由题知，直线 P_nP_{n+1} 过点 $P_n\left(n,(-1)^n\cdot\frac{1}{2^n}\right)$ 和 $P_{n+1}\left(n+1,(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}\right)$，

故其方程为 $y-\frac{(-1)^n}{2^n}=\frac{(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}-(-1)^n\frac{1}{2^n}}{(n+1)-n}(x-n)$，

即 $y-\frac{(-1)^n}{2^n}=\frac{3\cdot(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(x-n)$， ………………………………………… 9 分

令 $y=0$，即有 $x=n+\frac{2}{3}$，即 $Q_n\left(n+\frac{2}{3},0\right)$. ………………………………… 10 分

$|OQ_n|=n+\frac{2}{3}$，故 $T_n=\left(1+\frac{2}{3}\right)+\left(2+\frac{2}{3}\right)+\cdots+\left(n+\frac{2}{3}\right)=\frac{3n^2+7n}{6}$. …………………… 12 分

18.【解析】(1)由题意得：$(2\times0.01+0.015+0.03+a)\times10=1$，

所以 $a=0.035$， ………………………………………………………………………… 1 分

200 人的平均年龄为：$20\times0.1+30\times0.15+40\times0.35+50\times0.3+60\times0.1=41.5$. ……………… 3 分

(2)由题意得：利用分层抽样的方法从第一组抽取 2 人，从第二组抽取 3 人， ……………… 4 分

记从第一组抽取的 2 人为 A,B，从第二组抽取的 3 人为 a,b,c，

则从这 5 人中随机抽取 2 人的基本事件有 $C_5^2=10$，即 10 种，

其中两人恰好属于不同组别的基本事件有 2×3 种，即 6 种，

故所求的概率 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. …………………………………………………………… 7 分

(3)由题意可得 2×2 列联表为：

	购买力强人群	购买力弱人群	合计
青少年组	100	20	120
中老年组	60	20	80
合计	160	40	200

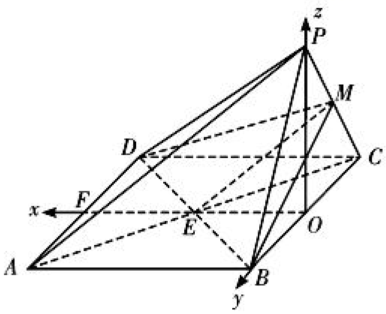
……………………9 分

故 K^2 的观测值 $k=\frac{200(100\times20-60\times20)^2}{120\times80\times160\times40}=\frac{25}{12}\approx2.083<6.635$， ………………… 11 分

故没有 99%的把握认为是否属“购买力强人群”与年龄有关. …………………………………… 12 分

19.【解析】(1)连接 AC 交 BD 于 E，连接 EM. 则 E 为 AC 中点，所以 EM 为 $\triangle APC$ 的中位线，$\therefore EM/\!/AP$，又 $\because EM\subset$ 平面 BDM，$AP\not\subset$ 平面 BDM，

$\therefore AP/\!/$ 平面 BDM. …………………………………………………… 5 分



(2)$\because PB^2+PC^2=BC^2=1$，所以 $PB\perp PC$.

取 BC 中点 O，AD 中点 F，连接 PO，OF，则 $PO\perp BC$，$PO=1$，

$\because BC\perp CD$，$CD\perp PC$，BC、$PC\subset$ 平面 PBC，$BC\cap PC=C$，

$\therefore CD\perp$ 平面 PBC，又 $\because PO\subset$ 平面 PBC，$\therefore CD\perp PO$，

$\because PO\perp BC$，$BC\cap CD=C$，BC、$CD\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore PO\perp$ 平面 $ABCD$，又因为 $OF\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PO\perp OF$，

所以 PO，OF，OB 两两垂直； ………………………………………………………… 7 分

如图，以 O 为原点，OF，OB，OP 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，

则 $D(2,-1,0),P(0,0,1),B(0,1,0),C(0,-1,0)$，所以 $M\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

$\therefore \overrightarrow{DM}=\left(-2,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\overrightarrow{BD}=(2,-2,0),\overrightarrow{CD}=(2,0,0)$. ………………………… 8 分

设平面 BDM 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

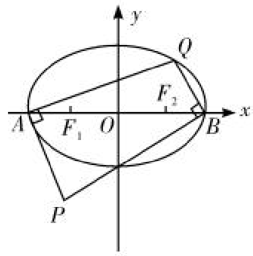
则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DM}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x_1-2y_1=0,\\ -2x_1+\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}z_1=0.\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{m}=(1,1,3)$； ………………………… 9 分

设平面 CDM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DM}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x_2=0,\\ -2x_2+\frac{1}{2}y_2+\frac{1}{2}z_2=0.\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}=(0,-1,1)$， ………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{11}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{22}}{11}$，

所以二面角 $C-DM-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{22}}{11}$. ………………………… 12 分



20.【解析】(1)由题意得 $e=\frac{1}{2}=\frac{c}{a}$，即 $a=2c$.

又 $S_{\triangle QAF_1}=\frac{1}{2}(a-c)\cdot y_Q$，点 Q 为椭圆上的动点.

故 $|y_Q|\leqslant b$，则 $S_{\triangle QAF_1}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}(a-c)\cdot b=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

即 $(a-c)^2(a^2-c^2)=3$，代入 $a=2c$ 得 $c=1$，故 $a=2,b=\sqrt{3}$，

即椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………… 5 分

(2)设 $Q(x_0,y_0),P(x,y)$，则 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$. ①

由题意得：$k_{AQ}=\frac{y_0}{x_0+2},k_{AP}=\frac{y}{x+2}(x\neq-2)$，

$k_{BQ}=\frac{y_0}{x_0-2},k_{BP}=\frac{y}{x-2}(x\neq2)$，

则 $k_{AQ}\cdot k_{AP}=-1,k_{BQ}\cdot k_{BP}=-1$.

且 $k_{AQ}\cdot k_{BQ}=\frac{y_0^2}{x_0^2-4}$，代入①得 $k_{AQ}\cdot k_{BQ}=-\frac{3}{4}$. ………………………… 8 分

又 $k_{AQ}\cdot k_{AP}\cdot k_{BQ}\cdot k_{BP}=1$，

所以 $k_{AP}\cdot k_{BP}=-\frac{4}{3}$， ………………………… 10 分

即 $\frac{y^2}{x^2-4}=-\frac{4}{3}$，整理得 $\frac{y^2}{\frac{16}{3}}+\frac{x^2}{4}=1$， ………………………… 11 分

故 $\frac{y^2}{\frac{16}{3}}+\frac{x^2}{4}=1(x\neq\pm2)$ 为所求轨迹方程. ………………………… 12 分

21.【解析】(1) $F(x)=\ln x+x+\frac{1}{x},(x>0)$.

$F'(x)=\frac{1}{x}+1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2+x-1}{x^2}$， ………………………… 1 分

令 $F'(x)=0$，解得 $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$（负值舍去）. ………………………… 2 分

所以当 $x\in\left(0,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ 时，$F'(x)<0$；

当 $x\in\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$ 时，$F'(x)>0$，…………………… 3 分

所以 $F(x)$ 的单调递减区间为 $\left(0,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$，单调递增区间为 $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$. …………………… 4 分

(2)由已知，$G(x)=2\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x$，

由于 $G(x)\leqslant me^{mx}+m$ 恒成立，即 $2\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x\leqslant me^{mx}+m$ 恒成立，

等价于 $2(x^2+1)\ln x\leqslant mx(e^{mx}+1)=(e^{mx}+1)\ln e^{mx}$ 恒成立，

令 $t(x)=(x+1)\ln x$，

$\therefore t(x^2)\leqslant t(e^{mx})$，

$\therefore t'(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1$，…………………… 5 分

令 $h(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1$，

$\therefore h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，…………………… 6 分

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，函数 $h(x)$ 单调递减，

当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 单调递增，

$\therefore h(x)\geqslant h(1)=2>0$，…………………… 7 分

$\therefore g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore x^2\leqslant e^{mx}$，

$\therefore 2\ln x\leqslant mx$，即 $m\geqslant\frac{2\ln x}{x}$ 恒成立，…………………… 8 分

令 $\varphi(x)=\frac{\ln x}{x}$，$x>0$，

$\therefore \varphi'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，…………………… 9 分

令 $\varphi'(x)=0$，解得 $x=e$，

当 $0<x<e$ 时，$\varphi'(x)>0$，函数 $\varphi(x)$ 单调递增，

当 $x>e$ 时，$\varphi'(x)<0$，函数 $\varphi(x)$ 单调递减，

$\therefore \varphi(x)_{\max}=\varphi(e)=\frac{1}{e}$，$\therefore m\geqslant\frac{2}{e}$，

故实数 m 的取值范围为 $\left[\frac{2}{e},+\infty\right)$. …………………… 12 分

22.【解析】(1)l_1 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，化为极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{6}(\rho\in\mathbf{R})$.

代入 l_2 的方程得：$\rho=3$，即 $B\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$，

方程 $2\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+3=0$，令 $\theta=0$，即 $\rho=\sqrt{3}$，即 $A(\sqrt{3},0)$. …………………… 5 分

(2)由(1)知，$|OA|=\sqrt{3}$，$|OB|=3$，且 $\angle BOA=\frac{\pi}{6}$，

故 $|AB|=\sqrt{3}$，设点 P 到直线 AB 的距离为 d，

故 $S=\frac{\sqrt{3}}{2}d$，设点 $P(\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta)$，$l_2$ 的一般方程为 $y=\sqrt{3}x-3$，

故 $S=\frac{\sqrt{3}}{2}d=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{|\sqrt{3}\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta-3|}{2}=\frac{3}{4}\left|\sqrt{3}+\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right|$，

当 $\theta=\frac{3\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$S_{\max}=\frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{4}$，

此时，P 点坐标为 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$. …………………… 10 分

23.【解析】(1)$m=1$ 时，$f(x)=|2x-1|+|x+1|$，

即 $f(x)=\begin{cases}-3x, x\leqslant -1,\\ 2-x, -1<x<\dfrac{1}{2},\\ 3x, x\geqslant \dfrac{1}{2},\end{cases}$

$f(x)\leqslant 6$，即 $\begin{cases}x\leqslant -1,\\ -3x\leqslant 6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-1<x<\dfrac{1}{2},\\ 2-x\leqslant 6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant \dfrac{1}{2},\\ 3x\leqslant 6.\end{cases}$

解得 $-2\leqslant x\leqslant 2$.

即不等式 $f(x)\leqslant 6$ 的解集为 $\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$. ………………………………………………………… 5 分

(2)当 $x\in\left[\dfrac{3}{4},2\right]$ 时，不等式 $|2x-1|+|x+m|\leqslant|2x+1|$，

即 $|x+m|+2x-1\leqslant 2x+1$，

即 $|x+m|\leqslant 2$ 在 $\left[\dfrac{3}{4},2\right]$ 上恒成立，

故 $-2\leqslant x+m\leqslant 2$，$-x-2\leqslant m\leqslant 2-x$.

故 $m\geqslant(-x-2)_{\max}$，且 $m\leqslant(2-x)_{\min}$，$x\in\left[\dfrac{3}{4},2\right]$，

故 $-\dfrac{11}{4}\leqslant m\leqslant 0$.

即实数 m 的取值范围为 $\left[-\dfrac{11}{4},0\right]$. ………………………………………………………………

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’ 专业、专注、有态度 ‘’ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。