高一期末考试
数学参考答案

1.A　由题意得 $A\cap B=\{2,6\}$.

2.C　由 $x^2-x-6>0$ 得 $x<-2$ 或 $x>3$,所以“$x^2-x-6>0$”是“$x<-5$”的必要不充分条件.

3.B　因为$(-1+2\mathrm{i})(3-\mathrm{i})=-1+7\mathrm{i}$,所以$(-1+2\mathrm{i})(3-\mathrm{i})$在复平面内对应的点位于第二象限.

4.D　$\sin 145^\circ\cos 35^\circ=\sin 35^\circ\cos 35^\circ=\dfrac{1}{2}\sin 70^\circ$.

5.A　由题意得$|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}|=2|\overrightarrow{BD}|=4\sqrt{2}$.

6.C　因为函数 $f(x)=2^x+3x-12$ 单调递增,且 $f(2)=2^2+6-12=-2<0$,$f(3)=2^3+9-12=5>0$,所以函数 $f(x)$的零点所在区间是$(2,3)$,即 $x_0\in(2,3)$.

7.C　由题可知$\dfrac{4\pi\times 2^3}{3}+V=\pi\times 2^2\times 4$,解得 $V=\dfrac{16\pi}{3}$.

8.B　设红、黑、白颜色的左手手套依次为 a_1,b_1,c_1,右手手套依次为 a_2,b_2,c_2,则这个试验的样本空间为$\{(a_1,b_1),(a_1,c_1),(a_1,a_2),(a_1,b_2),(a_1,c_2),(b_1,c_1),(b_1,a_2),(b_1,b_2),(b_1,c_2),(c_1,a_2),(c_1,b_2),(c_1,c_2),(a_2,b_2),(a_2,c_2),(b_2,c_2)\}$,共包含 15 个样本点.记事件 $A=$“取出的手套是一只左手套一只右手套,但不是一双手套”,则 $A=\{(a_1,b_2),(a_1,c_2),(b_1,a_2),(b_1,c_2),(c_1,a_2),(c_1,b_2)\}$,共包含 6 个样本点,所以 $P(A)=\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$.

9.BC　甘肃省这 7 年历次人口普查城镇人口比重的极差为 52.23%−11.13%=41.1%,A 错误.
这组数据从小到大排列依次为 11.13%,12.22%,15.34%,22.04%,24.01%,36.12%,52.23%,则这组数据的中位数为 22.04%,B 正确.
因为 $7\times 75\%=5.25$,所以这组数据的第三四分位数为 36.12%,C 正确.
平均数为$\dfrac{1}{7}(11.13\%+12.22\%+15.34\%+22.04\%+24.01\%+36.12\%+52.23\%)=\dfrac{173.09\%}{7}<25\%$,D 错误.

10.BC　易知 A 错误,B 正确.又因为 $B\subseteq C$,所以 $P(B+C)=P(C)$,$P(BC)=P(B)$,故选 BC.

11.BC　由题意得$\triangle ABC$的面积为$\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$.因为 C 为锐角,所以 $\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\dfrac{1}{4}$.由余弦定理,得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=19$,所以 $c=\sqrt{19}$,$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{2\sqrt{19}}{19}$.

12.BCD　三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面积为$(\sqrt{2}+\sqrt{2}+2)\times 3=6\sqrt{2}+6$.
因为 $BC=BA=\sqrt{2}$,$AC=2$,所以$\triangle ABC$为以 B 为直角的等腰三角形,则三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球半径 $r=\sqrt{1^2+(\dfrac{3}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$,所以外接球的表面积为 13π.

因为 $B_1C_1 \parallel BC$，$B_1C_1 \not\subset$ 平面 BCD，所以 $B_1C_1 \parallel$ 平面 BCD.

由已知得 $A_1B_1=B_1C_1$，又 D 是 A_1C_1 的中点，所以 $B_1D \perp A_1C_1$，侧棱 $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，又 $B_1D \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，所以 $AA_1 \perp B_1D$，

因为 $AA_1 \cap A_1C_1=A_1$，所以 $B_1D \perp$ 平面 AA_1C_1C，又 $CE \subset$ 平面 AA_1C_1C，所以 $B_1D \perp CE$，

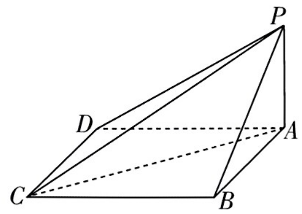
因为 $AE=1$，$AC=2$，$AA_1=3$，所以 $CE=\sqrt{5}$，$DE=\sqrt{5}$，$CD=\sqrt{10}$，则 $CE^2+DE^2=CD^2$，所以 $CE \perp DE$. 又 $DE \cap B_1D=D$，所以 $CE \perp$ 平面 B_1DE. 故选 BCD.

13. -2　$f(-5)=-f(5)=-2$.

14. $-\frac{1}{3}$　由题可知 $\tan\alpha=-2$，则 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=\frac{-2+1}{1+2}=-\frac{1}{3}$.

15. $\frac{4}{3}$　$y=\cos^2\omega x=\frac{1}{2}(1+\cos 2\omega x)$，又 $x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}]$，所以 $2\omega x\in[-\frac{\pi\omega}{2},\frac{\pi\omega}{3}]$. 由题可知 $-\frac{\pi\omega}{2}=-\frac{2\pi}{3}$，解得 $\omega=\frac{4}{3}$.

16. $\frac{3\pi}{4}$　如图，连接 AC，因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$，所以 $\angle PCA$ 为 PC 与底面 $ABCD$ 所成的角，则 $\angle PCA=\frac{\pi}{6}$，所以 $AC=\sqrt{3}PA$. 又 $AD=\sqrt{2}PA$，在矩形 $ABCD$ 中，$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=PA$，则 $AB=CD=PA$，所以 $\angle PBA=\frac{\pi}{4}$. 因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$，所以 $PA \perp BC$，又 $AB \perp BC$，$AB \cap PA=A$，所以 $BC \perp$ 平面 PAB，所以 $BC \perp PB$，所以顶点 B 的曲率为 $2\pi-(\frac{\pi}{2}\times 2+\frac{\pi}{4})=\frac{3\pi}{4}$.



17. 证明：由题意得 $\overrightarrow{AB}=(2,4)$，$\overrightarrow{AD}=(-2,1)$，$\overrightarrow{DC}=(1,2)$，…………………… 3 分

则 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$，…………………… 4 分

得 $AB \parallel DC$ 且 $AB=2DC$，则四边形 $ABCD$ 为梯形. …………………… 7 分

因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-2\times 2+1\times 4=0$，所以 $AB \perp AD$. …………………… 9 分

故以 $A(1,2)$，$B(3,6)$，$C(0,5)$，$D(-1,3)$ 为顶点的四边形是直角梯形. …………………… 10 分

18. 解：(1) $\frac{z_2}{z_1}=\frac{2+m\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(2+m\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{2+m+(m-2)\mathrm{i}}{2}$，…………………… 2 分

因为 $\frac{z_2}{z_1}$ 为纯虚数，所以 $\begin{cases}\frac{2+m}{2}=0,\\ \frac{m-2}{2}\neq 0,\end{cases}$ …………………… 4 分

解得 $m=-2$. …………………… 6 分

(2) 因为 $\frac{z_2}{z_1}\in\mathbf{R}$，所以 $\frac{m-2}{2}=0$，…………………… 7 分

解得 $m=2$，…………………… 8 分

所以 $3z_1+\mathrm{i}z_2=3+3\mathrm{i}+2\mathrm{i}-2=1+5\mathrm{i}$，…………………… 10 分

故 $3z_1+\mathrm{i}z_2$ 的实部与虚部之和为 $1+5=6$. …………………… 12 分

19. 解：(1)由 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$，…………………… 4 分

得 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$. …………………………………………………………… 6 分

(2)因为 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{7}{12}+\frac{1}{4}=\frac{5}{6}$，………………………………… 9 分

所以 $\cos(2\alpha-2\beta)=\cos2(\alpha-\beta)=2\cos^2(\alpha-\beta)-1=2\times\frac{25}{36}-1=\frac{7}{18}$. ………………… 12 分

20. 解：(1)由正弦定理得 $\sin A\cos B=\frac{\sin B}{2}+\sin C$，

即 $2\sin A\cos B=\sin B+2\sin C$. ………………………………………………………… 2 分

因为 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$， ………………………………………… 3 分

所以 $\sin B+2\cos A\sin B=0$，…………………………………………………………………… 4 分

因为 $\sin B\neq0$，所以 $\cos A=-\frac{1}{2}$，………………………………………………………… 5 分

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$. …………………………………………………………………… 6 分

(2)因为 $2\sin B=\sin C$，所以 $2b=c$，……………………………………………………………… 7 分

由 $S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABC}$，得 $\frac{1}{2}c\cdot AD\cdot\sin\angle BAD+\frac{1}{2}b\cdot AD\cdot\sin\angle DAC=\frac{1}{2}bc\sin A$，…

……………………………………………………………………………………………… 8 分

得 $c+b=\frac{1}{2}bc$. 又 $2b=c$，解得 $b=3,c=6$， ……………………………………………… 10 分

则 $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=\sqrt{9+36-2\times3\times6\times\cos\frac{2\pi}{3}}=3\sqrt{7}$，…………………… 11 分

所以$\triangle ABC$ 的周长为 $6+3+3\sqrt{7}=9+3\sqrt{7}$. …………………………………………… 12 分

21. 解：(1)如图 1，取 HE 的中点 N，连接 IN. 如图 2，连接 EG,HF，设 EG,HF 的交点为 O，连接 PO.

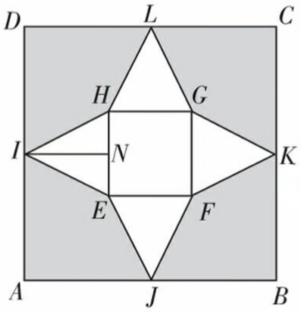


图 1

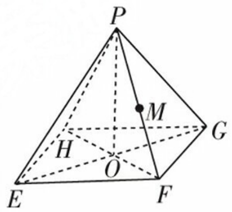


图 2

由题意得 $HI=EI$，$\therefore PE=IE=\sqrt{IN^2+EN^2}=\sqrt{5}$. ………………………………………… 1 分

易得四棱锥 $P-EFGH$ 为正四棱锥，$\therefore PO\perp$平面 $EFGH$， ………………………………… 3 分

$\therefore PE$ 与底面 $EFGH$ 所成的角为$\angle PEO$. …………………………………………………… 4 分

$\because EO=\frac{1}{2}EG=\sqrt{2}$，$\therefore \cos\angle PEO=\frac{EO}{PE}=\frac{\sqrt{10}}{5}$. ………………………………………… 6 分

(2)由题意得 M 到平面 PGH 的距离等于 F 到平面 PGH 的距离的$\frac{1}{2}$. ……………… 7 分

设 F 到平面 PGH 的距离为 h. 由题意得 $S_{\triangle PHG}=S_{\triangle HEI}=\frac{1}{2}HE\cdot IN=2$，$S_{\triangle FGH}=\frac{1}{2}HG\cdot FG=2$，$PO=\sqrt{PE^2-EO^2}=\sqrt{3}$. …………………………………………………… 9 分

$\because V_{F-PHG}=\frac{1}{3}S_{\triangle PHG}\cdot h=V_{P-FGH}=\frac{1}{3}S_{\triangle FGH}\cdot PO$，$\therefore h=\frac{S_{\triangle FGH}\cdot PO}{S_{\triangle PHG}}=\sqrt{3}$. ………… 11 分

故 M 到平面 PGH 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)设事件 D 为李明第一环节抽中 A 题，且第一环节通过面试，

由题意得李明第一环节抽到每道题目的概率均为$\frac{1}{3}$，……………………………………… 2 分

所以 $P(D)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$. ………………………………………………………………… 4 分

(2)方法一：设事件 E 为李明第一环节通过面试，

则 $P(E)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{13}{36}$. ……………………………………………… 7 分

设事件 F 为李明面试失败，李明答题情况如下：A 题错 B 题错 C 题错，A 题错 C 题错 B 题错，B 题错 A 题错 C 题错，B 题错 C 题错 A 题错，C 题错 A 题错 B 题错，C 题错 B 题错 A 题错.

所以 $P(F)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 6\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$. ………………………………………… 10 分

故李明第二环节或第三环节通过面试的概率为 $1-P(E)-P(F)=\frac{7}{18}$. ……………… 12 分

方法二：设事件 E 为李明第二环节通过面试，李明答题情况如下：A 题错 B 题对，A 题错 C 题对，B 题错 A 题对，B 题错 C 题对，C 题错 A 题对，C 题错 B 题对.

所以 $P(E)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3})=\frac{17}{72}$. ……
……………………………………………………………………………………… 7 分

设事件 F 为李明第三环节通过面试，李明答题情况如下：A 题错 B 题错 C 题对，B 题错 A 题错 C 题对，A 题错 C 题错 B 题对，C 题错 A 题错 B 题对，B 题错 C 题错 A 题对，C 题错 B 题错 A 题对.

所以 $P(F)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(2\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+2\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2})=\frac{11}{72}$. … 10 分

故李明第二环节或第三环节通过面试的概率为 $P(E)+P(F)=\frac{7}{18}$. ………………… 12 分