

2024 届普通高等学校招生全国统一考试  
青桐鸣大联考(高三)

数学答案

1. D 【解析】由  $|x-1| < 2$ , 解得  $-1 < x < 3$ ; 由  $x^2 + x - 2 > 0$ , 解得  $x < -2$  或  $x > 1$ , 所以  $A \cap B = \{x | 1 < x < 3\}$ . 故选 D.

2. C 【解析】 $f'(x) = e^x + \cos x$ , 则  $f'(0) = e^0 + \cos 0 = 2$ . 故选 C.

3. B 【解析】当  $x > 0$  时, 函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  单调递减, 故  $p$  是真命题.  $\neg p: \exists x > y > 0$ , 使得  $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$ . 故选 B.

4. A 【解析】 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \sin(\pi + x) = -\cos x \sin x = -\frac{1}{2} \sin 2x$ .  
故  $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{1}{2} \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ .  
故选 A.

5. B 【解析】由  $b^2 + c^2 = 2bc$  及基本不等式得  $b = c$ , 故  $\sin B = \sin C$ .  
由  $\sin B \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(B+C)$ , 得  $\sin^2 B = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2B$ , 化简解得  $\tan B = \sqrt{3}$ .  
故  $B = C = A = \frac{\pi}{3}$ ,  $\cos A = \frac{1}{2}$ . 故选 B.

6. B 【解析】由题意  $f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left[\omega\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{4}\right] = \cos\left(\omega x + \frac{\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \omega x$ .  
所以  $\frac{\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ , 得  $\omega = -\frac{9}{4} + 6k, k \in \mathbf{Z}$ . 又  $\omega > 0$ , 所以正实数  $\omega$  的最小值为  $-\frac{9}{4} + 6 = \frac{15}{4}$ . 故选 B.

7. B 【解析】由题意当  $t=0$  时,  $P = P_0 e^0 = P_0$ ; 当  $t=2$  时,  $P_1 = P_0 e^{-2k}$ ; 当  $t=5$  时,  $P_2 = P_0 e^{-5k}$ .  
又  $P_1 = (1 - 20\%) P_0 = 80\% P_0 = P_0 e^{-2k}$ , 所以  $e^{-2k} = 80\% = 0.8$ .

因为  $\frac{P_2}{P_0} = e^{-5k} = (e^{-2k})^{\frac{5}{2}} = 0.8^{\frac{5}{2}} \approx 0.57 = 57\%$ , 故 5 h 后的有毒、有害物质大约为原来有毒、有害物质的 57%. 故选 B.

8. C 【解析】因为  $x_1 + x_2 = 1$ ,  
所以  $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = 1, x_1 > 0, x_2 > 0$ ,  
故  $\frac{3x_1}{x_2} + \frac{1}{x_1x_2} = \frac{3x_1}{x_2} + \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{4x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 2 \geq 6$ ,  
当且仅当  $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}$  时等号成立, 故  $\frac{3x_1}{x_2} + \frac{1}{x_1x_2}$  的最小值为 6. 故选 C.

9. BC 【解析】“ $x > 2$ ”不能推出“ $x > 3$ ”, “ $x > 3$ ”能推出“ $x > 2$ ”, 故“ $x > 2$ ”是“ $x > 3$ ”的必要不充分条件, 所以 A 错误;  
函数  $f(x) = x^3$  是  $\mathbf{R}$  上的单调递增函数, 所以  $x > y \Leftrightarrow x^3 > y^3$ , 故 B 正确;  
 $1 > -2$ , 而  $1^2 < (-2)^2$ , 所以  $x > y$  不能推出  $x^2 > y^2, x^2 > y^2$  也不能推出  $x > y$ , 故 C 正确;  
函数  $f(x) = 2^x$  是  $\mathbf{R}$  上的单调递增函数, 所以  $x > y \Leftrightarrow 2^x > 2^y$ , 故 D 错误. 故选 BC.

10. ACD 【解析】由  $\sin a = \frac{\sqrt{5}}{5}, 0 < a < \frac{\pi}{2}$ , 得  $\cos a = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 故 A 正确;  
由  $\sin^2(a + \beta) = 1 - \cos^2(a + \beta) = \frac{1}{5}$ , 得  $\sin(a + \beta) = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$ , 又  $\sin(a + \pi) = -\frac{\sqrt{5}}{5}, a + \pi \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right), a + \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ , 若  $\sin(a + \beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ , 则  $a + \beta = a + \pi$ , 则  $\beta = \pi$ , 与  $\beta < \pi$  矛盾, 所以  $\sin(a + \beta) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , 故 B 错误;  
 $\cos \beta = \cos(a + \beta - a) = \cos(a + \beta) \cos a + \sin(a + \beta) \sin a$

• 数学答案(第 1 页, 共 5 页) •



$$\beta) \sin \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{3}{5}, \text{故 C}$$

正确;

$$\text{由 } \cos \beta = -\frac{3}{5} \text{ 及 } \frac{\pi}{2} < \beta < \pi, \text{ 得 } \sin \beta = \frac{4}{5},$$

$$\text{故 } \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{5} \times$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{4}{5} = -\frac{11\sqrt{5}}{25}, \text{故 D 正确.}$$

故选 ACD.

11. ABD 【解析】当  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  时,  $f(x) = \cos x +$

$$\frac{1}{\cos x}, f'(x) = -\sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sin x \left(\frac{1}{\cos^2 x} -$$

$1\right) > 0$ , 所以  $f(x)$  在区间  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  上单调递增, 所以

A 正确;

$$\text{当 } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ 时, } f(x) = -\cos x + \frac{1}{\cos x},$$

$\sin x > 0$ ,

$$\text{所以 } f'(x) = \sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sin x \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 1\right) > 0,$$

故  $f(x)$  在区间  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  上单调递增, 所以 B 正确;

$f(\pi) = 1 - 1 = 0$ , 所以 C 错误;

$$f(x + 2\pi) = |\cos(x + 2\pi)| + \frac{1}{|\cos(x + 2\pi)|} =$$

$$|\cos x| + \frac{1}{|\cos(x + 2\pi)|} = |\cos x| + \frac{1}{|\cos x|} = f(x),$$

故  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的周期函数,

而  $f(0) = 1 + 1 = 2$ , 所以当  $x = 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$  时,  $f(x) = 2$ , 故  $f(x) = 2$  有无穷多个解, 所以 D 正确.

故选 ABD.

12. AC 【解析】 $f(-1) = f(1) = 2f'(1)$ , 故 A 正确;

由  $f(2+x) = 4 - f(-x)$ , 令  $x = -1$ , 得  $2f(1) = 4$ , 所以  $f(1) = 2$ .

又  $2f'(1) = 2f'(0) = f(1)$ , 所以  $f'(1) = 1$ ,  $f(0) = 1$ .

$$f(2) = 4 - f(-0) = 4 - 1 = 3,$$

$$\text{又由 } \begin{cases} f(2+x) = 4 - f(-x), \\ f(x) = f(-x), \end{cases} \text{ 得 } f(2+x) = 4 -$$

$f(x)$ , 故得  $f(4+x) = 4 - f(2+x)$ ,

两式相减得  $f(4+x) = f(x)$ , 所以函数  $f(x)$  是周

期为 4 的周期函数, 所以  $f(3) = f(-1) = f(1) = 2$ ,  $f(4) = f(0) = 1$ , 故  $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 2 + 3 + 2 + 1 = 8$ .

由  $f(x)$  为偶函数, 得  $f(x) = f(-x)$ , 所以  $f'(x) = -f'(-x)$ , 故  $f'(x)$  为奇函数,

则  $f'(0) = 0$ ,

因为  $f(2+x) = 4 - f(-x)$ , 所以  $f'(2+x) = f'(-x)$ , 且  $f'(2+0) = f'(-0)$ , 所以  $f'(2) = 0$ . 易得  $f'(4+x) = f'(x)$ , 所以函数  $f'(x)$  是周期为 4 的周期函数,

所以  $f'(3) = f'(-1) = -f'(1) = -1$ ,  $f'(4) = f'(0) = 0$ ,

故  $f'(1) + f'(2) + f'(3) + f'(4) = 1 + 0 - 1 + 0 = 0$ , 故 B 错误;

$$\sum_{i=1}^{50} f(i) = 12 \times 8 + f(49) + f(50) = 12 \times 8 + f(1) + f(2) = 101, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^{50} f'(i) = 12 \times 0 + f'(49) + f'(50) = 12 \times 0 + f'(1) + f'(2) = 1, \text{ 故 D 错误. 故选 AC.}$$

13.  $(-\infty, 1]$  【解析】由  $\frac{2x}{x-2} \leq 1$  解得  $-2 \leq x < 2$ , 故

$A = \{x | -2 \leq x < 2\}$ ; 由  $\log_2 x < a$ , 解得  $0 < x < 2^a$ , 故  $B = \{x | 0 < x < 2^a\}$ . 又  $B \subseteq A$ , 所以  $2^a \leq 2$ , 故  $a \leq 1$ .

14.  $a = \sqrt{5}$  或  $a \geq 3$  【解析】由余弦定理, 得  $a^2 = 9 + c^2 - 2 \times 3c \cos A = c^2 - 4c + 9$ , 所以  $c^2 - 4c + 9 - a^2 = 0$ .

当  $a \geq 3$  时,  $9 - a^2 \leq 0$ , 关于  $c$  的二次方程只有一个正根, 所以 C 有唯一解;

当  $\Delta = 16 - 4(9 - a^2) = 0$  时, 解得  $a = \sqrt{5}$ , 此时 C 有唯一解.

综上所述, 当  $a = \sqrt{5}$  或  $a \geq 3$  时, C 有唯一解.

15.  $-\frac{3}{5}$  【解析】由  $\sin x_1 = \sin x_2 > 0, 0 < x_1 < x_2 <$

$2\pi$ , 得  $x_1 + x_2 = \pi$ , 故  $x_2 = \pi - x_1$ , 所以  $x_1 - x_2 = 2x_1 - \pi$ , 所以  $\cos(x_1 - x_2) = \cos(2x_1 - \pi) =$

$$-\cos 2x_1 = 2\sin^2 x_1 - 1 = -\frac{3}{5}.$$



16.  $(-\infty, 1]$  【解析】由  $x^2 - ax + e^{-x} + x \ln x \geq 0$ ,

$x > 0$ , 得  $x - a + \frac{1}{xe^x} + \ln x \geq 0$ , 故  $x + \ln x +$

$$\frac{1}{e^{\ln x + x}} \geq a,$$

设  $t = x + \ln x$ , 则  $t \in \mathbf{R}$ .

令  $f(t) = t + \frac{1}{e^t}$ , 则  $f'(t) = 1 - \frac{1}{e^t}$ , 又  $f'(0) = 0$ ,

故在区间  $(-\infty, 0)$  上,  $f'(t) < 0$ , 函数  $f(t)$  单调递减; 在区间  $(0, +\infty)$  上,  $f'(t) > 0$ , 函数  $f(t)$  单调递增, 所以  $f(t) \geq f(0) = 1$ , 故  $f(t)_{\min} = 1$ , 故  $a \leq 1$ .

17. 解: (1)  $f(0) = \sin \varphi = \frac{1}{2}$ ,  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ , 故  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ,

(1分)

$$\text{又 } f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\omega \times \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{6}\right) = 0,$$

由“五点法”得  $\frac{5\pi}{12} \times \omega + \frac{\pi}{6} = \pi$ ,

解得  $\omega = 2$ ,

(3分)

$$\text{则 } f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

(4分)

(2) 由(1)得,  $g(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos^2 x -$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{6} -$$

$$\cos 2x \cos \frac{\pi}{3} + \sin 2x \sin \frac{\pi}{3} + \cos 2x + 1 =$$

$$\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x + 1 = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1. \quad (8分)$$

当  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$  时,  $g(x)$  取得最小值,

$$g(x)_{\min} = -1, \quad (9分)$$

$$\text{此时 } 2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{即 } x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}. \quad (10分)$$

18. 解: (1) 由题意,  $f(-x) = -f(x)$ ,

(1分)

$$g(-x) = g(x), \quad (2分)$$

$$\text{所以 } f(-x) + g(-x) = -f(x) + g(x) = e^x. \quad (3分)$$

(3分)

$$\text{又 } f(x) + g(x) = e^{-x}, \quad (2分)$$

$$\text{②} - \text{①} \text{ 得 } f(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2}, \quad (4分)$$

$$\text{②} + \text{①} \text{ 得 } g(x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2}. \quad (5分)$$

(2) 由题知  $e^x + e^{-x} + a(e^{-x} - 1) \geq 1$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立,

即  $e^x + e^{-x} - 1 \geq a(1 - e^{-x})$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立, (6分)

当  $x > 0$  时,  $0 < e^{-x} < 1$ , 所以  $1 - e^{-x} > 0$ ,

$$\text{所以 } a \leq \frac{e^x + e^{-x} - 1}{1 - e^{-x}} = \frac{e^x + \frac{1}{e^x} - 1}{1 - \frac{1}{e^x}} = \frac{e^{2x} - e^x + 1}{e^x - 1}. \quad (7分)$$

令  $e^x - 1 = t (t > 0)$ , 则  $e^x = t + 1$ ,

$$a \leq \frac{(t+1)^2 - (t+1) + 1}{t} = \frac{t^2 + t + 1}{t} = t + \frac{1}{t} + 1, \quad (9分)$$

$$\text{又 } t + \frac{1}{t} + 1 \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} + 1 = 3, \quad (10分)$$

当且仅当  $t = 1$ , 即  $x = \ln 2$  时等号成立, (11分)

故  $a$  的取值范围为  $(-\infty, 3]$ . (12分)

19. 解: (1) 由题意  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{a^{-x}}{x}$ , (1分)

当  $a \leq 0$  时,  $f'(x) < 0$ , 函数  $f(x)$  在定义域  $(0, +\infty)$  上单调递减, (2分)

当  $a > 0$  时, 令  $f'(x) = \frac{a^{-x}}{x} = 0$ , 得  $x = a$ ,

当  $x \in (0, a)$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x \in (a, +\infty)$  时,  $f'(x) < 0$ , (3分)

所以  $f(x)$  在区间  $(0, a)$  上单调递增, 在区间  $(a, +\infty)$  上单调递减, (4分)

综上, 当  $a \leq 0$  时, 函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减; 当  $a > 0$  时,  $f(x)$  在  $(0, a)$  上单调递增, 在  $(a, +\infty)$  上单调递减. (5分)

(2) 证明: 因为  $a = \log_2 e > 1 > 0$ ,

由(1)知当  $0 < x \leq 1$  时,  $f(x)$  单调递增, (6分)

故  $f(x) \leq f(1) = 0$ , (7分)

又  $x - 1 \leq 0$ , 所以  $(x - 1)f(x) \geq 0$ , (8分)

当  $1 < x \leq 2$  时,  $f(x)$  在  $(1, \log_2 e)$  上单调递增, 在  $(\log_2 e, 2)$  上单调递减, (9分)



又  $f(2) = 1 - 2 + \log_2 e \times \ln 2 = 0, f(1) = 0,$

故当  $1 < x \leq 2$  时,  $f(x) \geq 0,$  (10分)

又  $x - 1 > 0,$  所以  $(x - 1)f(x) \geq 0,$  (11分)

综上, 当  $0 < x \leq 2$  时,  $(x - 1)f(x) \geq 0,$  (12分)

20. 解: (1) 由正弦定理及  $\frac{\sin B - \sin C}{\sin A} = \frac{\sin A - \sin C}{\sin B + \sin C},$

$$\text{得 } \frac{b - c}{a} = \frac{a - c}{b + c}, \quad (1 \text{分})$$

化简得  $b^2 - c^2 = a^2 - ac,$

$$\text{所以 } \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}, \quad (2 \text{分})$$

$$\text{由余弦定理可得 } \cos B = \frac{1}{2}, \quad (3 \text{分})$$

$$\text{所以 } B = \frac{\pi}{3}. \quad (4 \text{分})$$

(2) 在  $\triangle ABC$  中, 由  $\cos C = \frac{\sqrt{13}}{13},$  得  $\sin C =$

$$\sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{2\sqrt{39}}{13}, \quad (5 \text{分})$$

$$\text{由 } \cos B = \frac{1}{2}, \text{ 得 } \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (6 \text{分})$$

则  $\sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C =$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{13}}{13} + \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{39}}{13} = \frac{3\sqrt{39}}{26}. \quad (7 \text{分})$$

$$\text{由正弦定理得, } \frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\frac{3\sqrt{39}}{26}}{\frac{2\sqrt{39}}{13}} = \frac{3}{4}, \quad (8 \text{分})$$

设  $a = 3x, c = 4x,$  由余弦定理得  $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos B = 13x^2,$  故  $b = \sqrt{13}x,$  (9分)

在  $\triangle BCD$  中, 由余弦定理得,  $BD^2 = CB^2 + CD^2 - 2CB \cdot CD \cdot \cos C,$

$$\text{即 } \frac{37}{4} = 9x^2 + \frac{13}{4}x^2 - 2 \times 3x \times \frac{\sqrt{13}}{2}x \times \frac{\sqrt{13}}{13},$$

解得  $x = 1,$  (10分)

则  $a = 3, c = 4,$  (11分)

所以  $\triangle ABC$  的面积  $S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times$

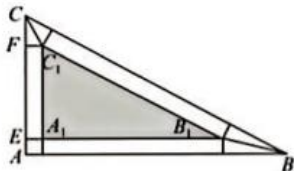
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}. \quad (12 \text{分})$$

21. 解: (1) 因为  $\angle CAB = 90^\circ, \angle ACB = 60^\circ, AC = 20 \text{ m},$

所以  $\angle ABC = 30^\circ, AB = 20\sqrt{3} \text{ m},$  (1分)

因为  $\triangle A_1B_1C_1$  与  $\triangle ABC$  的三边分别平行, 所以  $\triangle A_1B_1C_1$  与  $\triangle ABC$  相似,

连接  $CC_1,$  过点  $A_1, C_1$  向  $AC$  引垂线, 垂足分别为  $E, F,$



则  $AE = A_1E = C_1F = 1,$

易得  $\angle C_1CF = \frac{1}{2}\angle ACB = 30^\circ,$

$$\text{所以 } CF = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}, \quad (2 \text{分})$$

$$A_1C_1 = AC - AE - FC = 20 - 1 - \sqrt{3} = 19 - \sqrt{3}. \quad (3 \text{分})$$

在  $\text{Rt} \triangle A_1B_1C_1$  中,  $\angle A_1C_1B_1 = \angle ACB = 60^\circ,$

故  $C_1B_1 = 2A_1C_1, A_1B_1 = \sqrt{3}A_1C_1,$  (4分)

所以  $\text{Rt} \triangle A_1B_1C_1$  的周长  $l = A_1C_1 + B_1C_1 + A_1B_1 = 3A_1C_1 + \sqrt{3}A_1C_1 = (3 + \sqrt{3}) \times (19 - \sqrt{3}) = 54 + 16\sqrt{3} \text{ (m)};$  (5分)

(2) 由(1)知,  $\triangle ABC$  的面积  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 20 \times 20\sqrt{3} = 200\sqrt{3} \text{ (m}^2\text{)},$  (6分)

设  $r$  为  $\triangle ABC$  内切圆的半径, 则  $0 < x < r,$

则  $AE = A_1E = C_1F = x,$

$$CF = \frac{x}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}x,$$

所以  $A_1C_1 = AC - AE - FC = 20 - x - \sqrt{3}x = 20 - (1 + \sqrt{3})x,$  (7分)

又  $\triangle A_1B_1C_1$  与  $\triangle ABC$  相似,

所以  $A_1B_1 = \sqrt{3}A_1C_1 = \sqrt{3} [20 - (1 + \sqrt{3})x],$  (8分)

绿地公园  $\triangle A_1B_1C_1$  的面积  $S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}A_1B_1 \cdot$

$$A_1C_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}A_1C_1^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} [20 - (1 + \sqrt{3})x]^2 \geq$$

$$\frac{3}{4}S_{\triangle ABC} = 150\sqrt{3}, \quad (10 \text{分})$$



化简得  $20 - (1 + \sqrt{3})x \geq 10\sqrt{3}$ ,

解得  $x \leq 5(3\sqrt{3} - 5)$ ,

故健步道宽度的最大值为  $5(3\sqrt{3} - 5)$  m. (12分)

22. 解: (1) 证明: 由  $g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} (x > 0)$ ,

得  $g'(x) = -\sin x + x$ , (1分)

设  $h(x) = -\sin x + x$ , 则  $h'(x) = 1 - \cos x$ ,

因为  $h'(x) \geq 0$  恒成立,

故  $g'(x)$  为增函数, (2分)

则  $g'(x) > g'(0) = 0$ ,

故  $g(x)$  为增函数, (3分)

故  $g(x) > g(0) = 0$ . (4分)

(2) 易得  $f(x) - 2\ln \frac{x+1}{x} - \frac{x+2}{x+1} + \cos |ax| = e^x -$

$2\ln(x+1) - \frac{x+2}{x+1} + \cos |ax|$ ,

故设  $F(x) = e^x - 2\ln(x+1) - \frac{x+2}{x+1} + \cos |ax|$ ,

$x > 0$ ,

则  $F'(x) = e^x - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - |a| \sin(|a|x)$ ,

(5分)

令  $G(x) = e^x - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - |a| \sin(|a|x)$ ,

$x > 0$ ,

则  $G'(x) = e^x + \frac{2x}{(x+1)^3} - a^2 \cos(|a|x)$ , (6分)

当  $|a| > 1$  时,  $G'(0) = 1 - a^2 < 0$ ,

故  $\exists x_0 \in (0, +\infty)$ , 使得在  $(0, x_0)$  上,  $G'(x) < 0$ ,

则  $G(x)$  在  $(0, x_0)$  上单调递减,

故在  $(0, x_0)$  上,  $F'(x) < F'(0) = 0$ ,

故  $F(x)$  在  $(0, x_0)$  上单调递减,

故在  $(0, x_0)$  上,  $F(x) < F(0) = 0$ , 不合题意, 舍去;

(7分)

当  $|a| \leq 1$  即  $-1 \leq a \leq 1$  时, 由(1)得  $\cos |ax| >$

$1 - \frac{a^2 x^2}{2} \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ ,

故  $F(x) > e^x - 2\ln(x+1) - \frac{1}{x+1} - \frac{x^2}{2}$ , (8分)

设  $p(x) = e^x - 2\ln(x+1) - \frac{1}{x+1} - \frac{x^2}{2}, x > 0$ ,

则  $p'(x) = e^x - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - x$ , (9分)

设  $q(x) = e^x - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - x, x > 0$ ,

则  $q'(x) = (e^x - 1) + \frac{2x}{(x+1)^3} > 0$ ,

故  $q(x)$  为增函数, (10分)

故  $p'(x) > p'(0) = 0$ ,

故  $p(x)$  为增函数,

故  $p(x) > p(0) = 0$ , 则  $F(x) > 0$  恒成立, 符合题意. (11分)

综上, 实数  $a$  的取值范围为  $[-1, 1]$ . (12分)

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

