姓名＿＿＿＿＿＿ 座位号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

（在此卷上答题无效）

绝密 ★ 启用前

2022 年普通高等学校招生全国统一考试

数学（理科）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名和座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 M 满足 $\complement_U M=\{1,3\}$，则

A．$2\in M$　　B．$3\in M$　　C．$4\notin M$　　D．$5\notin M$

2. 已知 $z=1-2\mathrm{i}$，且 $z+a\bar{z}+b=0$，其中 a，b 为实数，则

A．$a=1$，$b=-2$　　B．$a=-1$，$b=2$

C．$a=1$，$b=2$　　D．$a=-1$，$b=-2$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=3$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

4. 嫦娥二号卫星在完成探月任务后，继续进行深空探测，成为我国第一颗环绕太阳飞行的人造行星．为研究嫦娥二号绕日周期与地球绕日周期的比值，用到数列 $\{b_n\}$：

$b_1=1+\dfrac{1}{\alpha_1}$，$b_2=1+\dfrac{1}{\alpha_1+\dfrac{1}{\alpha_2}}$，$b_3=1+\dfrac{1}{\alpha_1+\dfrac{1}{\alpha_2+\dfrac{1}{\alpha_3}}}$，…，依此类推，其中

$\alpha_k\in\mathbf{N}^*(k=1,2,\cdots)$．则

A．$b_1<b_5$　　B．$b_3<b_8$　　C．$b_6<b_2$　　D．$b_4<b_7$

5. 设 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，点 A 在 C 上，点 $B(3,0)$，若 $|AF|=|BF|$，则 $|AB|=$

A．2　　B．$2\sqrt{2}$　　C．3　　D．$3\sqrt{2}$

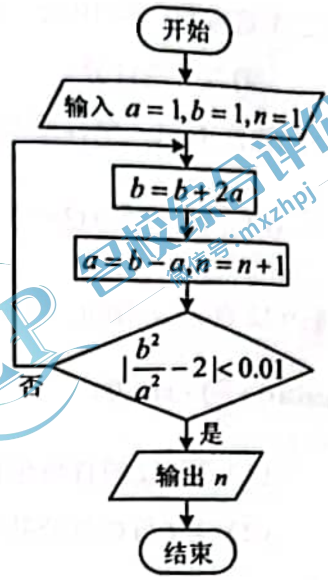
6. 执行右边的程序框图，输出的$n=$

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6



7. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E，F分别为AB，BC的中点，则

A. 平面$B_1EF\perp$平面BDD_1　　B. 平面$B_1EF\perp$平面A_1BD

C. 平面$B_1EF//$平面A_1AC　　D. 平面$B_1EF//$平面A_1C_1D

8. 已知等比数列$\{a_n\}$的前3项和为168，$a_2-a_5=42$，则$a_6=$

A. 14　　B. 12　　C. 6　　D. 3

9. 已知球O的半径为1，四棱锥的顶点为O，底面的四个顶点均在球O的球面上，则当该四棱锥的体积最大时，其高为

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 某棋手与甲、乙、丙三位棋手各比赛一盘，各盘比赛结果相互独立．已知该棋手与甲、乙、丙比赛获胜的概率分别为p_1，p_2，p_3，且$p_3>p_2>p_1>0$．记该棋手连胜两盘的概率为p，则

A. p与该棋手和甲、乙、丙的比赛次序无关

B. 该棋手在第二盘与甲比赛，p最大

C. 该棋手在第二盘与乙比赛，p最大

D. 该棋手在第二盘与丙比赛，p最大

11、双曲线C的两个焦点为F_1，F_2，以C的实轴为直径的圆记为D，过F_1作D的切线与C交于M，N两点，且$\cos\angle F_1NF_2=\frac{3}{5}$，则$C$的离心率为

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{13}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{17}}{2}$

12、已知函数$f(x)$，$g(x)$的定义域均为$\mathbf{R}$，且$f(x)+g(2-x)=5$，$g(x)-f(x-4)=7$．若$y=g(x)$的图像关于直线$x=2$对称，$g(2)=4$，则$\sum_{k=1}^{22}f(k)=$

A. -21　　B. -22　　C. -23　　D. -24

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．从甲、乙等5名同学中随机选3名参加社区服务工作，则甲、乙都入选的概率为________．

14．过四点$(0,0)$，$(4,0)$，$(-1,1)$，$(4,2)$中的三点的一个圆的方程为________．

15．记函数$f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,\ 0<\varphi<\pi)$的最小正周期为$T$．若$f(T)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x=\frac{\pi}{9}$为$f(x)$的零点，则$\omega$的最小值为________．

16．已知$x=x_1$和$x=x_2$分别是函数$f(x)=2a^x-ex^2$ $(a>0$且$a\neq1)$的极小值点和极大值点．若$x_1<x_2$，则a的取值范围是________．

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共60分。

17．（12分）

记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知

$$\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A).$$

（1）证明：$2a^2=b^2+c^2$；

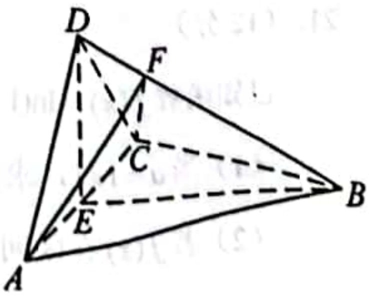
（2）若$a=5$，$\cos A=\frac{25}{31}$，求$\triangle ABC$的周长．

18．（12分）

如图，四面体$ABCD$中，$AD\perp CD$，$AD=CD$，$\angle ADB=\angle BDC$，E为AC的中点．

（1）证明：平面$BED\perp$平面ACD；

（2）设$AB=BD=2$，$\angle ACB=60°$，点F在BD上，当$\triangle AFC$的面积最小时，求CF与平面ABD所成的角的正弦值．



19.（12分）

某地经过多年的环境治理，已将荒山改造成了绿水青山．为估计一林区某种树木的总材积量，随机选取了10棵这种树木，测量每棵树的根部横截面积（单位：m^2）和材积量（单位：m^3），得到如下数据：

样本号i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总和
根部横截面积x_i	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6
材积量y_i	0.25	0.40	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.40	3.9

并计算得$\sum\limits_{i=1}^{10}x_i^2=0.038$，$\sum\limits_{i=1}^{10}y_i^2=1.6158$，$\sum\limits_{i=1}^{10}x_iy_i=0.2474$．

（1）估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量；

（2）求该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数（精确到0.01）；

（3）现测量了该林区所有这种树木的根部横截面积，并得到所有这种树木的根部横截面积总和为$186\,m^2$．已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比．利用以上数据给出该林区这种树木的总材积量的估计值．

附：相关系数$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$，$\sqrt{1.896}\approx1.377$．

20.（12分）

已知椭圆E的中心为坐标原点，对称轴为x轴、y轴，且过$A(0,-2)$，$B(\frac{3}{2},-1)$两点．

（1）求E的方程；

（2）设过点$P(1,-2)$的直线交E于M，N两点，过M且平行于x轴的直线与线段AB交于点T，点H满足$\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$．证明：直线$HN$过定点．

21.（12分）

已知函数$f(x)=\ln(1+x)+axe^{-x}$．

（1）当$a=1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

（2）若$f(x)$在区间$(-1,0)$，$(0,+\infty)$各恰有一个零点，求a的取值范围．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．［选修 4—4：坐标系与参数方程］（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos 2t, \\ y=2\sin t \end{cases}$（$t$ 为参数）。以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{3})+m=0$。

（1）写出 l 的直角坐标方程；

（2）若 l 与 C 有公共点，求 m 的取值范围。

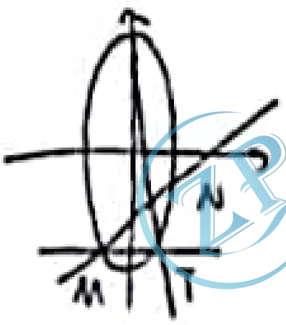
23．［选修 4—5：不等式选讲］（10 分）

已知 a，b，c 都是正数，且 $a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}=1$，证明：

（1）$abc\le\frac{1}{9}$；

（2）$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\le\frac{1}{2\sqrt{abc}}$。

$\frac{9}{4}\,{}^{3}y\,\frac{1}{3}$



$e^{-x}-xe^{-x}$