# 高三数学试题

**注意事项：**

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答。**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
3. 本卷命题范围：高考范围。

**选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。**

1. 复数 $z$ 满足 $\frac{z}{1+2i}=\frac{2}{1+i}$，则它的共轭复数 $\bar{z}$ 的虚部为

A. $-1$　　B. $1$　　C. $-i$　　D. $i$

2. 已知集合 $M=\{x|-3<x\leqslant 1\}$，$N=\{x|\log_4|x|\leqslant\frac{1}{2}\}$，则集合 $M\cap N=$

A. $[-2,1]$　　B. $[-2,0)\cup(0,1]$　　C. $(-3,\frac{1}{2}]$　　D. $(-3,0)\cup(0,1]$

3. 老师排练节目需要4个男生和2个女生，将这六名学生随机排成一排，2个女生不相邻的概率为

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

4. 已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，且向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量是 $\frac{1}{4}\boldsymbol{a}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是

A. $\frac{2\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

5. 已知圆 $C:x^2+y^2=4$，从点 $E(-4,0)$ 出发的光线要想不被圆 $C$ 挡住直接到达点 $F(3,m)$，则实数 $m$ 的取值范围为

A. $(-\frac{7\sqrt{3}}{3},\frac{7\sqrt{3}}{3})$　　B. $(-\infty,-\frac{7\sqrt{3}}{3})\cup(\frac{7\sqrt{3}}{3},+\infty)$

C. $(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$　　D. $(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})\cup(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$

6. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$M$ 为正方形 $ABB_1A_1$ 内（含边界）一动点，且满足 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\overrightarrow{AA_1}$，则直线 $MC_1$ 与平面 $AA_1B$ 所成角的正弦值的取值范围是

A. $[\frac{\sqrt{2}}{2},1]$　　B. $[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$　　C. $[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}]$　　D. $[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{3}]$

7. 已知函数 $f(x)$、$g(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的可导函数，且 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)>0, g(x)>0$，若 $f(x)$、$g(x)$ 满足 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}<\dfrac{g'(x)}{g(x)}$，则当 $x_1<x<x_2$ 时下列选项一定成立的是（

A. $f(x_2)g(x_1)>f(x_1)g(x_2)$　　B. $f(x)g(x_1)>f(x_1)g(x)$

C. $\dfrac{f(x_2)-g(x_2)}{f(x_1)-g(x_1)}<\dfrac{g(x_2)}{g(x_1)}$　　D. $\dfrac{f(x_2)}{g(x_2)}<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{g(x_1)+g(x_2)}$

8. 已知实数 $m,n,t$ 满足 $m=\lg(2^t+8^t)$，$n=\log_8(10^t-2^t)$，则（

A. $|m-n|\leqslant|t-n|$，$|m-t|\leqslant|t-n|$　　B. $|m-n|\leqslant|t-n|$，$|m-t|\geqslant|t-n|$

C. $|m-n|\geqslant|t-n|$，$|m-t|\leqslant|t-n|$　　D. $|m-n|\geqslant|t-n|$，$|m-t|\geqslant|t-n|$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(-1)=f(3)=2$，则下列命题中一定正确的是

A. $f(-2)>-2$　　B. $f(x)$ 有 3 个零点

C. $f(2)<-2$　　D. $f(f(5))>f(f(-\frac{1}{2}))$

10. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=4$，$AC=3$，$\cos(C-B)=\dfrac{3}{4}$，则下列结论错误的是

A. $AB$ 边上的中线长为 2　　B. $\triangle ABC$ 为锐角三角形

C. $\cos B=\dfrac{4}{5}$　　D. $\triangle ABC$ 的周长为 12

11. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点分别为 $F_1$、$F_2$，上顶点为 $M$，直线 $l:y=mx(m\neq0)$ 与椭圆 $C$ 交于 $A$，$B$ 两点，$\angle F_1AF_2$ 的角平分线与 $x$ 轴相交于点 $C$，与 $y$ 轴相交于点 $D(0,n)$，则

A. 四边形 $AF_1BF_2$ 的周长为 16　　B. 直线 $MA$，$MB$ 的斜率之积为 $-\dfrac{9}{16}$

C. $\dfrac{1}{|AF_1|}+\dfrac{4}{|BF_1|}$ 的最小值为 $\dfrac{9}{4}$　　D. 当 $n=-\dfrac{1}{2}$ 时，点 $A$ 的纵坐标为 $\dfrac{9}{14}$

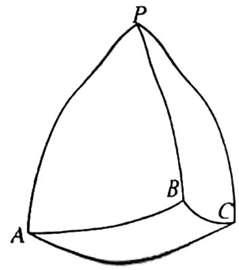
12. 勒洛三角形也被称为定宽曲线，勒洛三角形的立体版就是如图所示的立体图形，它能在两个平行平面间自由转动，并且始终保持与两平面都接触，它是以正四面体的四个顶点为球心，以正四面体的棱长为半径的四个球的公共部分组成的，因此它能像球一样来回滚动. 这种立体图形称为勒洛四面体，若图中勒洛四面体的四个顶点分别为 $P$、$A$、$B$、$C$，任意两个顶点之间的距离为 1，则下列说法正确的是

A. 图中所示勒洛四面体表面上任意两点间距离的最大值为 1

B. 图中所示勒洛四面体的内切球的表面积为 $\dfrac{(11-4\sqrt{6})\pi}{2}$

C. 平面 $ABC$ 截此勒洛四面体所得截面的面积为 $\pi-\sqrt{3}$

D. 图中所示的勒洛四面体的体积是 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

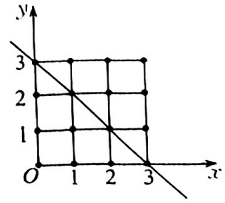



三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 小明统计了最近一段时间某超市冷饮的销售量 $n$. 根据统计发现 $n$ 近似服从正态分布 $N(50,\sigma^2)$，且 $P(X\geqslant20)=0.90$，已知该超市冷饮的销售量在区间 $[20,80]$ 内的有 80 天，则可以估计小明一共统计了________天.

14. 已知平面直角坐标系中，曲线 $C$ 上的点到定直线 $l:x=2$ 的距离与到定点 $F(-2,0)$ 的距离相等，$P$ 为曲线 $C$ 上一点，过点 $P$ 作 $PM\perp l$，垂足为 $M$. 若 $|PF|=|MF|$，则 $|OP|=$________.

15. 数学课上，老师出了一道智力游戏题. 如图所示，平面直角坐标系中有一个 3 乘 3 方格图（小正方形边长为 1），一共有十六个红色的格点，游戏规则是每一步可以改变其中一个点的颜色（只能由红变绿或绿变红），如将其中任何一个点由红色改成绿色，则这个点周围与之相邻的点也要从原来的颜色变成另外一种颜色，比如选择 $(1,1)$ 变成绿色，则与之相邻的 $(0,1)$，$(1,0)$，$(1,2)$，$(2,1)$ 四个点也要变成绿色，那么最少需要________步，才能使得位于直线 $y=-x+3$ 上的四个点变成绿色，而其他点都是红色.




16. 已知数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1+3c_2+\cdots+3^{n-1}c_n=\frac{n}{2}\cdot 3^n$，令 $b_n=c_n+pn$，数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $H_n$，若 $H_n\leqslant H_5$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，则实数 $p$ 的取值范围为________.

**四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤。**

17.（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=[\sin(\omega x+\varphi)-\sqrt{3}\cos(\omega x+\varphi)]\cos(\omega x+\varphi)+\frac{\sqrt{3}}{2}(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 为奇函数，且其图象相邻两对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

(1) 求 $\omega$ 和 $\varphi$；

(2) 当 $x\in[-\frac{\pi}{12},\pi]$ 时，记方程 $2\omega f(x+\frac{\varphi}{2})=m$ 的根为 $x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$，求 $m\cdot\frac{x_2+x_3}{x_1-x_3}$ 的范围.

18.（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=4$，且 $a_n-a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_{n+1}-3)(a_n-3)$.

(1) 求证：数列 $\{\frac{2}{a_n-3}\}$ 是等差数列；

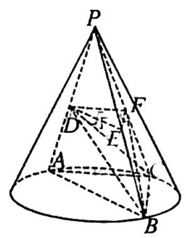
(2) 记数列 $b_n=(a_n-3)(a_{n+1}-3)$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$.

19.（本小题满分 12 分）

如图所示的圆锥中，$P$ 为顶点，在底面圆周上取 $A$、$B$、$C$ 三点，使得 $AC=4$，$BC=2$，在母线 $PA$ 上取一点 $D$，过 $D$ 作一个平行于底面的平面，分别交 $PB$、$PC$ 于点 $E$、$F$，且 $EF=1$，$DE=\sqrt{5}$.

(1) 求证：平面 $ABD\perp$ 平面 $ABC$；

(2) 已知三棱锥 $F-BCD$ 的体积为 2，求平面 $EBD$ 与平面 $BDF$ 夹角的正切值.



20.（本小题满分 12 分）

某公司对新生产出来的 300 辆新能源汽车进行质量检测，每辆汽车要由甲、乙、丙三名质检员各进行一次质量检测，三名质检员中有两名或两名以上检测不合格的将被列为不合格汽车，有且只有一名质检员检测不合格的汽车需要重新由甲、乙两人各进行一次质量检测，重新检测后，如果甲、乙两名质检员中还有一人或两人检测不合格，也会被列为不合格汽车. 假设甲、乙、丙三名质检员的检测相互独立，每一次检测不合格的概率为 $p(0<p<1)$.

(1)求每辆汽车被列为不合格汽车的概率 $q$；

(2)公司对本次质量检测的预算支出是 4 万元，每辆汽车不需要重新检测的费用为 60 元，需要重新检测的前后两轮检测的总费用为 100 元，所有汽车除检测费用外，其他费用估算为 1 万元，若 300 辆汽车全部参与质量检测，实际费用是否会超出预算？

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=e^{x-1}-ax^2, a\in\mathbf{R}$.

(1)若 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线与直线 $y=-\frac{1}{3}x+2$ 垂直，求 $a$ 的值及切线方程；

(2)若 $a>0$，函数 $g(x)=f(x)+ax\ln(ax)$ 在其定义域上存在零点，求实数 $a$ 的取值范围.

22.（本小题满分 12 分）

双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1$、$F_2$，焦距为 4，虚轴长为 2.

(1)求双曲线 $C$ 的标准方程；

(2)直线 $l_1$ 与双曲线 $C$ 的右支交于 $M$、$N$ 两点，$M$ 位于第一象限，$M$ 关于原点 $O$ 的对称点为 $Q$. 设 $\angle F_1QF_2$ 的角平分线为 $l_2$，且 $l_1\perp l_2$，垂足为 $E$，求 $\frac{|ME|}{|NE|}$ 的最大值.