2023 北京海淀高三二模

数　　学

本试卷共 6 页，150 分．考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．已知集合 $A=\{x\mid -1<x<2\}, B=\{0,1\}$，则（　）

A．$A\subsetneqq B$　　B．$B\subsetneqq A$　　C．$A=B$　　D．$A\cap B=\varnothing$

2．在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 以 Ox 为始边，其终边经过点 $P(1,2)$，则 $\sin\alpha=$（　）

A．$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　B．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　C．2　　D．$\dfrac{1}{2}$

3．若 $(2-x)^n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ 的展开式中常数项为 32，则 $n=$（　）

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

4．下列函数中，既是奇函数又在区间 $(0,1)$ 上单调递增的是（　）

A．$y=\lg x$　　B．$y=\dfrac{2}{x}$　　C．$y=2^{|x|}$　　D．$y=\tan x$

5．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=3, a_1-a_2=a_3$，则 S_n 的最大值为（　）

A．7　　B．6　　C．5　　D．4

6．已知抛物线 $C: y^2=4x$，经过点 P 的任意一条直线与 C 均有公共点，则点 P 的坐标可以为（　）

A．$(0,1)$　　B．$(1,-3)$　　C．$(3,4)$　　D．$(2,-2)$

7．芯片是科技产品中的重要元件，其形状通常为正方形．生产芯片的原材料中可能会存在坏点，而芯片中出现坏点即报废，通过技术革新可以减小单个芯片的面积，这样在同样的原材料中可以切割出更多的芯片，同时可以提高芯片生产的产品良率．

$$\text{产品良率}=\frac{\text{切割得到的无坏点的芯片数}}{\text{切割得到的所有芯片数}}\times 100\%$$

在芯片迭代升级过程中，每一代芯片的面积为上一代的 $\dfrac{1}{2}$．图 1 是一块形状为正方形的芯片原材料，上面有 4 个坏点，若将其按照图 2 的方式切割成 4 个大小相同的正方形，得到 4 块第 3 代芯片，其中只有一块无坏点，则由这块原材料切割得到第 3 代芯片的产品良率为 25%．若将这块原材料切割成 16 个大小相同的正方形，得到 16 块第 5 代芯片，则由这块原材料切割得到第 5 代芯片的产品良率为（　）

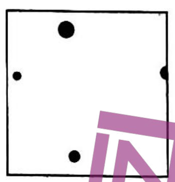


图 1 （原材料）

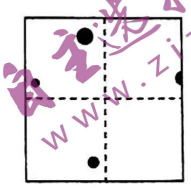


图 2 （第 3 代）

A．50%　　B．62.5%　　C．75%　　D．87.5%

8．已知正方形 $ABCD$ 所在平面与正方形 $CDEF$ 所在平面互相垂直，且 $CD=2$，P 是对角线 CE 的中点，Q

是对角线 BD 上一个动点，则 P，Q 两点之间距离的最小值为（　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　D．$\sqrt{6}$

9．已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是平面内两个非零向量，那么“$\vec{a}\,//\,\vec{b}$”是“存在 $\lambda\neq 0$，使得 $|\vec{a}+\lambda\vec{b}|=|\vec{a}|+|\lambda\vec{b}|$”的（　）

A．充分而不必要条件　B．必要而不充分条件　C．充分必要条件　D．既不充分也不必要条件

10．已知动直线 l 与圆 $O: x^2+y^2=4$ 交于 A，B 两点，且 $\angle AOB=120^\circ$．若 l 与圆 $(x-2)^2+y^2=25$ 相交所得的弦长为 t，则 t 的最大值与最小值之差为（　）

A．$10-4\sqrt{6}$　　B．1　　C．$4\sqrt{6}-8$　　D．2

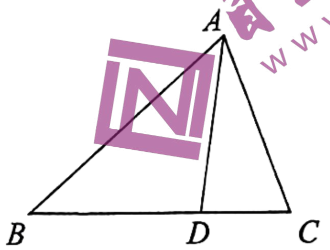
第二部分　（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11．在复平面内，复数 z 所对应的点为 $(1,1)$，则 $z\cdot\overline{z}=$____________.

12．已知双曲线 C 经过点 $(2,0)$，渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，则 C 的标准方程为____________.

13．如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 是边 BC 上一点，$AD=BD=4, CD=2, AC=3\sqrt{2}$，则 $\cos\angle ADC=$__________；$\triangle ABD$ 的面积为____________.



14．设函数 $f(x)=\sin\omega x, g(x)=mx^3$.

①若 $\omega=\dfrac{\pi}{2}, m=1$，则不等式 $f(x)>g(x)$ 的解集为____________；

②若 $\omega=\dfrac{\pi}{4}$，且不等式 $f(x)>g(x)$ 的解集中恰有一个正整数，则 m 的取值范围是____________.

15．在数列 $\{x_n\}$ 中，$x_1=1, x_2=2$．设向量 $\vec{a}_n=(x_n, x_{n+1})$，已知 $\vec{a}_n\cdot(a_{n+1}-\vec{a}_n)=0(n=1,2,\cdots)$，给出下列四个结论：

① $x_3=3$；② $\forall n\in\mathbf{N}^*, x_n>0$；③ $\forall n\in\mathbf{N}^*, x_{n+2}>x_n$；④ $\forall n\in\mathbf{N}^*, x_{n+1}\neq x_n$．其中所有正确结论的序号是____________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16．（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=a\sin x\cos x+\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，且 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$.

（I）求 a 的值和 $f(x)$ 的最小正周期；

（II）求 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调递增区间.

17．（本小题 14 分）

某大学 A 学院共有学生 1000 人，其中男生 640 人，女生 360 人．该学院体育社团为了解学生参与跑步运动的情况，按性别分层抽样，从该学院所有学生中抽取若干人作为样本，对样本中的每位学生在 5 月份的累

计跑步里程进行统计，得到下表．

跑步里程 s（km）	$0\le s<30$	$30\le s<60$	$60\le s<90$	$s\ge 90$
男生	a	12	10	5
女生	6	6	4	2

（I）求 a 的值，并估计 A 学院学生 5 月份累计跑步里程 s（km）在 $[0,30)$ 中的男生人数；

（II）从 A 学院样本中 5 月份累计跑步里程不少于 $90(\text{km})$ 的学生中随机抽取 3 人，其中男生人数记为 X，求 X 的分布列及数学期望；

（III）该大学 B 学院男生与女生人数之比为 λ，B 学院体育社团为了解学生参与跑步运动的情况，也按性别进行分层抽样．已知 A 学院和 B 学院的样本数据整理如下表．

5 月份累计跑步里程平均值（单位：km）

学院 / 性别	A	B
男生	50	59
女生	40	45

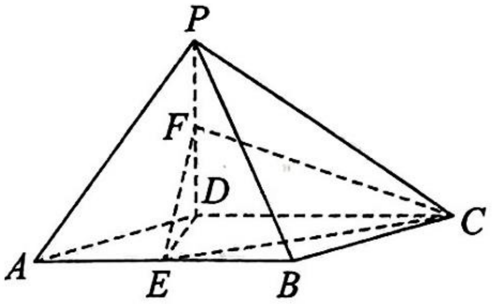
设 A 学院样本中学生 5 月份累计跑步里程平均值为 $\overline{x}_A$，B 学院样本中学生 5 月份累计跑步里程平均值为 $\overline{x}_B$，是否存在 λ，使得 $\overline{x}_A\ge\overline{x}_B$？如果存在，求 λ 的最大值；如果不存在，说明理由．

18.（本小题 13 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为菱形，E，F 分别为 AB，PD 的中点．

（I）求证：EF // 平面 PBC；

（II）若 $AD=2\sqrt{3}$，二面角 $E-FC-D$ 的大小为 $45°$，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知．求 PD 的长．



条件①：$DE\perp PC$；条件②：$PB=PC$．

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分．

19.（本小题 15 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 A，上、下顶点分别为 B_1,B_2，直线 AB_1 的方程为 $x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}=0$．

（I）求椭圆 E 的方程及离心率；

（II）P 是椭圆上一点，且在第一象限内，M 是点 P 关于 x 轴的对称点．过 P 作垂直于 y 轴的直线交直线 AB_1 于点 Q，再过 Q 作垂直于 x 轴的直线交直线 PB_2 于点 N．求 $\angle MNQ$ 的大小．

20.（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{x}\ln x$

（I）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求证：$f(x)<x$；

（Ⅲ）若函数 $g(x)=f(x)+a\left(x^2-x\right)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上无零点，求 a 的取值范围.

21.（本小题 15 分）

设 λ 为整数．有穷数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正整数，其项数为 m（$m\geq 2$）．若 $\{a_n\}$ 满足如下两个性质，则称 $\{a_n\}$ 为 P_λ 数列：

① $a_m=1$，且 $a_i\neq 1(i=1,2,\cdots,m-1)$；

② $a_{n+1}=\begin{cases}|\lambda a_n+1|, & a_n \text{ 为奇数,}\\ \dfrac{a_n}{2}, & a_n \text{ 为偶数}\end{cases}\quad (n=1,2,\cdots,m-1)$

（Ⅰ）若 $\{a_n\}$ 为 P_1 数列，且 $a_1=5$，求 m；

（Ⅱ）若 $\{a_n\}$ 为 P_{-1} 数列，求 a_1 的所有可能值；

（Ⅲ）若对任意的 P_1 数列 $\{a_n\}$，均有 $m\leq 2\log_2 a_1+d$，求 d 的最小值.

海淀区2022—2023学年第二学期期末练习

高三数学

参考答案

一、选择题

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	A	A	D	B	D	C	C	C	D

二、填空题

（11）2

（12）$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$

（13）$\frac{1}{8}$；$3\sqrt{7}$

（14）$(-\infty,-1)\cup(0,1)$；$[\frac{1}{8},\frac{\sqrt{2}}{2})$

（15）②③④

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（16）（本小题13分）

解：（Ⅰ）由 $f(\frac{\pi}{4})=a\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}+\cos(2\times\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})$

$$=a\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

得 $a=2$.

所以， $f(x)=2\sin x\cos x+\cos(2x+\frac{\pi}{6})$

$$=\sin 2x+\cos 2x\cos\frac{\pi}{6}-\sin 2x\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$$

所以， $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

（Ⅱ）由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 得 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{12}$ $(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的单调递增区间为 $[k\pi-\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{12}]\ (k\in\mathbf{Z})$.

当 $k=0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}]$，

当 $k=1$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $[\frac{7\pi}{12},\frac{13\pi}{12}]$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调递增区间为 $[0,\frac{\pi}{12}]$，$[\frac{7\pi}{12},\pi]$.

（17）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）由题意知，男女比例为 16∶9，则 $\frac{a+12+10+5}{18}=\frac{16}{9}$，故 $a=5$.

估计 A 学院学生 5 月跑步里程在 $[0,30)$ 中的男生人数为 $1000\times\frac{5}{50}=100$ 人.

（Ⅱ）X 的取值范围是 $\{1,2,3\}$.

$P(X=1)=\frac{C_5^1C_2^2}{C_7^3}=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$,

$P(X=2)=\frac{C_5^2C_2^1}{C_7^3}=\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$,

$P(X=3)=\frac{C_5^3}{C_7^3}=\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$.

因此 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

$E(X)=1\times\frac{1}{7}+2\times\frac{4}{7}+3\times\frac{2}{7}=\frac{15}{7}$.

（Ⅲ）存在满足条件的 λ，且 λ 的最大值为 $\frac{1}{9}$.

设 B 学院女生人数为 x，则男生人数为 λx，则 $\bar{x}_B=\frac{59\lambda x+45x}{\lambda x+x}=\frac{59\lambda+45}{\lambda+1}$，

而 $\bar{x}_A=\frac{50\times640+40\times360}{1000}=\frac{232}{5}$.

依题意，$\bar{x}_A\geq\bar{x}_B$，得 $\frac{232}{5}\geq\frac{59\lambda+45}{\lambda+1}$，解得 $\lambda\leq\frac{1}{9}$，所以 λ 的最大值为 $\frac{1}{9}$.

（18）（本小题 13 分）

（Ⅰ）取 PC 中点 M，连接 FM, BM.

在 $\triangle PCD$ 中，M,F 分别为 PC,PD 的中点，所以 $MF \parallel DC$， $MF=\frac{1}{2}DC$.

在菱形 $ABCD$ 中，因为 $AB \parallel DC$， $BE=\frac{1}{2}DC$，

所以 $BE \parallel MF$， $BE=MF$.

所以四边形 $BEMF$ 为平行四边形，因此 $EF \parallel BM$.

又因为 $EF \not\subset$ 平面 PBC， $BM \subset$ 平面 PBC，

所以 $EF \parallel$ 平面 PBC.

（Ⅱ）选择条件①： $DE \perp PC$

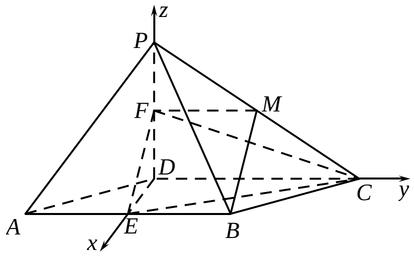
因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$， $DE, DC \subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PD \perp DE$， $PD \perp DC$.

又因为 $DE \perp PC$， $PD \cap PC = P$

所以 $DE \perp$ 平面 PCD，又 $DC \subset$ 平面 PCD

所以 $DE \perp DC$



所以建立如图空间直角坐标系 $D-xyz$.

又因为 $AB \parallel DC$， $DE \perp AB$.

又 E 为 AB 中点，所以 $AD=DB$，即 $\triangle ADB$ 为正三角形. 因为 $AD=2\sqrt{3}$，所以 $DE=3$.

设 $F(0,0,t)(t>0)$， $E(3,0,0)$， $C(0,2\sqrt{3},0)$.

$\overrightarrow{EF}=(-3,0,t)$, $\overrightarrow{EC}=(-3,2\sqrt{3},0)$.

平面 FCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,0)$.

设平面 EFC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}_2 \cdot \overrightarrow{EF}=0, \\ \boldsymbol{n}_2 \cdot \overrightarrow{EC}=0. \end{cases}$$

得 $\begin{cases} -3x+tz=0, \\ -3x+2\sqrt{3}y=0. \end{cases}$ 取 $x=2t$，则 $y=\sqrt{3}t$， $z=6$.

所以 $\boldsymbol{n}_2=(2t,\sqrt{3}t,6)$.

由题意，二面角 $E-FC-D$ 的大小为 $45°$

所以$|\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>|=|\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}|=|\frac{2t}{\sqrt{3t^2+4t^2+36}}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

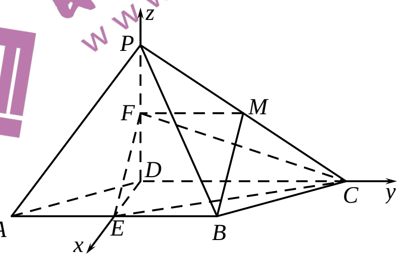
解得$t=\pm 6$（舍负）.

因为F是PD的中点，所以PD的长为12.

经检验符合题意.

选择条件②：

因为$PD\perp$平面$ABCD$，$DB,DC,DE\subset$平面$ABCD$，



所以$PD\perp DB$，$PD\perp DC$，$PD\perp DE$.

又因为$PB^2=PD^2+BD^2$，$PC^2=PD^2+DC^2$，

且$PB=PC$

所以$BD=DC$，在菱形$ABCD$中，$AB=BD=AD$，

即$\triangle ADB$为正三角形.

又因为E为AB中点，所以$DE\perp DC$

建立如图空间直角坐标系$D-xyz$.

又因为$AB\,/\!/\,DC$，$DE\perp AB$.

因为$\triangle ADB$为正三角形．且$AD=2\sqrt{3}$，所以$DE=3$.

设$F(0,0,t)(t>0)$，$E(3,0,0)$，$C(0,2\sqrt{3},0)$.

$\overrightarrow{EF}=(-3,0,t)$，$\overrightarrow{EC}=(-3,2\sqrt{3},0)$.

平面FCD的法向量为$\boldsymbol{n}_1=(1,0,0)$.

设平面EFC的法向量为$\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{EF}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{EC}=0.\end{cases}$$

得$\begin{cases}-3x+tz=0,\\ -3x+2\sqrt{3}y=0.\end{cases}$取$x=2t$，则$y=\sqrt{3}t$，$z=6$.

所以$\boldsymbol{n}_2=(2t,\sqrt{3}t,6)$.

由题意，二面角$E-FC-D$的大小为$45°$

所以$|\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>|=|\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}|=|\frac{2t}{\sqrt{3t^2+4t^2+36}}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

解得 $t=\pm 6$（舍负）.

因为 F 是 PD 的中点，所以 PD 的长为 12.

经检验符合题意.

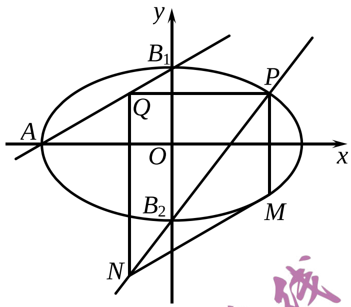
19. （本小题 15 分）

解：（Ⅰ）由直线 AB_1 的方程为 $x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}=0$，可得 $A(-\sqrt{3},0),B_1(0,1)$.

所以，$a=\sqrt{3},b=1$，由 $a^2=b^2+c^2$ 得，$c=\sqrt{2}$.

椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$，离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅱ）依题意，设 $P(x_0,y_0)$（$x_0>0,y_0>0$），则 $M(x_0,-y_0)$.



且由 P 是椭圆上一点，可得 $\dfrac{x_0{}^2}{3}+y_0{}^2=1$.

直线 AB_1 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+1$，

由 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+1=y_0$ 得，$x=\sqrt{3}(y_0-1)$.

所以 $Q(\sqrt{3}(y_0-1),y_0)$.

直线 PB_2 的方程为 $y=\dfrac{y_0+1}{x_0}x-1$，令 $x=\sqrt{3}(y_0-1)$，得

$$y=\frac{\sqrt{3}(y_0{}^2-1)}{x_0}-1=\frac{\sqrt{3}(-\frac{x_0{}^2}{3})}{x_0}-1=-\frac{\sqrt{3}}{3}x_0-1.$$

即 $N(\sqrt{3}(y_0-1),-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x_0-1)$.

所以 $k_{MN}=\dfrac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\dfrac{-y_0+\frac{\sqrt{3}}{3}x_0+1}{x_0-\sqrt{3}(y_0-1)}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{x_0-\sqrt{3}y_0+\sqrt{3}}{x_0-\sqrt{3}y_0+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

即直线 MN 的倾斜角是 $\dfrac{\pi}{6}$，所以 $\angle MNQ=\dfrac{\pi}{3}$.

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）对 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

可得 $f'(1)=1$.

又可知 $f(1)=0$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x-y-1=0$.

（Ⅱ）因为 $x>0$，所以 $\sqrt{x}>0$.

由此可知，要证 $\sqrt{x}\ln x<x$，只需证 $\ln x<\sqrt{x}$，即证 $\ln x-\sqrt{x}<0$.

令 $h(x)=\ln x-\sqrt{x}$，

求导得 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2-\sqrt{x}}{2x}$.

令 $h'(x)=0$, 解得 $x=4$.

可知 $x,h'(x)$ 与 $h(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,4)$	4	$(4,+\infty)$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	极大值	↘

所以 $h(x)\le h(4)=\ln 4-2<0$.

所以 $\ln x-\sqrt{x}<0$ 恒成立.

即原不等式成立.

（Ⅲ）$g(x)=\sqrt{x}\ln x+a(x^2-x)$，

因为 $x>1$，所以 $\sqrt{x}\ln x>0,\ x^2-x>0$.

所以当 $a\ge 0$ 时，$g(x)>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，符合题意.

当 $a<0$ 时，$g'(x)=\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}+a(2x-1)$.

令 $t(x)=g'(x)$，

则 $t'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\dfrac{\sqrt{x}}{x}-\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x\sqrt{x}}+2a=-\dfrac{\ln x}{4x\sqrt{x}}+2a<0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立.

所以 $t(x)=g'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

$g'(1)=1+a$.

①当 $g'(1)=1+a\le 0$ 即 $a\le -1$ 时，$g'(x)<0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立.

所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

所以 $g(x)<g(1)=0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，符合题意.

②当 $g'(1)=1+a>0$ 即 $-1<a<0$ 时，

因为 $x>1$ 且由（Ⅱ）知 $\ln x<\sqrt{x}$，

所以 $g'(x)=\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}+a(2x-1)<\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+a(2x-1)<\dfrac{1}{2}+1+a(2x-1)$.

所以 $g'(1-\dfrac{1}{a})<a-\dfrac{1}{2}<0$，

所以存在 $x_0\in(1,1-\dfrac{1}{a})$ 使得 $g'(x_0)=0$，

因此 $x,g'(x)$ 与 $g(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(1,x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	极大值	↘

所以 $g(x_0)>g(1)=0$.

由（Ⅱ）中 $\sqrt{x}\ln x<x$，

可以得 $g(x)=\sqrt{x}\ln x+a(x^2-x)<x+a(x^2-x)=x(ax+1-a)$.

令 $x=1-\dfrac{1}{a}$，得 $g(1-\dfrac{1}{a})<0$.

所以 $g(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上存在零点，不合题意，舍去.

综上，a 的取值范围是 $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$.

（21）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）依题意，$a_1=5$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, & a_n\text{为奇数,}\\ \dfrac{a_n}{2}, & a_n\text{为偶数}\end{cases}$，

所以 $a_2=6，a_3=3，a_4=4，a_5=2，a_6=1$.

从而 $m=6$.

（Ⅱ）依题意，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-1, & a_n\text{为奇数,}\\ \dfrac{a_n}{2}, & a_n\text{为偶数}\end{cases}$，$a_1\neq1$.

下面证明对于任意的正整数 $k\neq1$，当 $a_1=k$ 时，均存在数列 $\{a_n\}$ 为 P_{-1} 数列.

$a_1=2$时，$a_2=1$，$m=2$符合题意.

反证，假设存在正整数$k\neq 1$，当$a_1=k$时，不存在数列$\{a_n\}$为P_{-1}数列，

设此时k的最小值为M（$M\geq 3$），

即$a_1=2,3,4,\cdots,M-1$时存在P_{-1}数列，$a_1=M$时不存在P_{-1}数列.

（1）当M为奇数时，

因为存在以$M-1$为首项的P_{-1}数列$a_1,a_2,\cdots,a_m$，

所以$M,a_1,a_2,\cdots,a_m$就是首项为M的P_{-1}数列，与假设矛盾.

（2）当M为偶数时，

因为存在以$\frac{M}{2}$为首项的P_{-1}数列$a_1,a_2,\cdots,a_m$，

所以$M,a_1,a_2,\cdots,a_m$就是首项为M的P_{-1}数列，与假设矛盾.

综上，a_1的所有可能取值为全体大于1的正整数.

（III）依题意，$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1, & a_n\text{为奇数}, \\ \frac{a_n}{2}, & a_n\text{为偶数}, \end{cases}$ $a_m=1$，$a_{m-1}=2$，$a_{m-2}=4$，$\cdots$.

（1）先证明$d=2$符合题意，即$2\log_2 a_1+2\geq m$.

当$m=2$时，显然成立.

当$m\geq 3$时，对任意$a_i\geq 3$，$a_{i+2}\in\left\{\frac{a_i+1}{2},\frac{a_i}{2}+1,\frac{a_i}{4}\right\}$. 故$a_{i+2}\leq\frac{a_i}{2}+1$，即$a_i-2\geq 2(a_{i+2}-2)$.

（i）当$m=2t+1(t=1,2,\cdots)$时，

有$a_1-2\geq 2^{t-1}(a_{m-2}-2)=2^t$，$a_1\geq 2^t+2=2^{\frac{m-1}{2}}+2$.

所以$2\log_2 a_1+2>2\log_2(2^{\frac{m-1}{2}})+2=m+1>m$.

（ii）当$m=2t+2(t=1,2,\cdots)$时，

有$a_2-2\geq 2^{t-1}(a_{m-2}-2)=2^t$，$a_2\geq 2^t+2=2^{\frac{m}{2}-1}+2$，$a_1\geq a_2-1=2^{\frac{m}{2}-1}+1$.

所以$2\log_2 a_1+2>2\log_2(2^{\frac{m}{2}-1})+2=m$.

（2）再证明$d\geq 2$.

对任意的偶数 $m=2t(t=2,3,\cdots)$，令 $a_n=\begin{cases}2^{\frac{m-n-1}{2}}+1, & n=1,3,\cdots,m-1,\\ 2^{\frac{m-n}{2}}+2, & n=2,4,\cdots,m-2,\\ 1, & n=m.\end{cases}$

（i）先验证 $\{a_n\}$ 为 P_1 数列：

当 $n=1,3,\cdots,m-3$ 时，$a_n=2^{\frac{m-n-1}{2}}+1$ 为奇数，$a_{n+1}=2^{\frac{m-(n+1)}{2}}+2=a_n+1$，符合②.

当 $n=2,4,\cdots,m-2$ 时，$a_n=2^{\frac{m-n}{2}}+2$ 为偶数，$a_{n+1}=2^{\frac{m-(n+1)-1}{2}}+1=\frac{1}{2}a_n$，符合②.

当 $n=m-1$ 时，$a_{m-1}=2$，$a_m=1$，符合②.

又 $\{a_n\}$ 符合①，所以 $\{a_n\}$ 为 P_1 数列.

（ii）下面证明 $d<2$ 不符合题意.

假设 $d<2$.

因为 $\forall m=2t(t=2,3,\cdots)$，$d\ge m-2\log_2 a_1=m-2\log_2(2^{\frac{m}{2}-1}+1)=2-2\log_2(1+2^{1-\frac{m}{2}})$.

即 $\forall m=2t(t=2,3,\cdots)$，$m\le 2-2\log_2(2^{1-\frac{d}{2}}-1)$，矛盾.

综上，d 的最小值为 2.