# 杭州二中 2022 学年第二学期高三年级 3 月考试
## 数学试卷
### 第 I 卷（选择题）

**一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1．已知集合 $A=\left\{x\middle|-1\le x\le 4\right\},B=\left\{x\middle|y=\ln\left(4-x^2\right)\right\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A．$(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$　B．$[-1,2)$　C．$[-1,4]$　D．$(-2,4]$

2．已知复数 $z=\dfrac{2+bi}{1-i}\left(b\in\mathrm{R}\right)$ 的实部为 $-1$，则 $b$ 的值为（　　）．

A．2　B．4　C．$-2$　D．$-4$

3．圆锥的侧面展开图是一个半径为 4，弧长为 $4\pi$ 的扇形，则该圆锥的表面积为（　　）

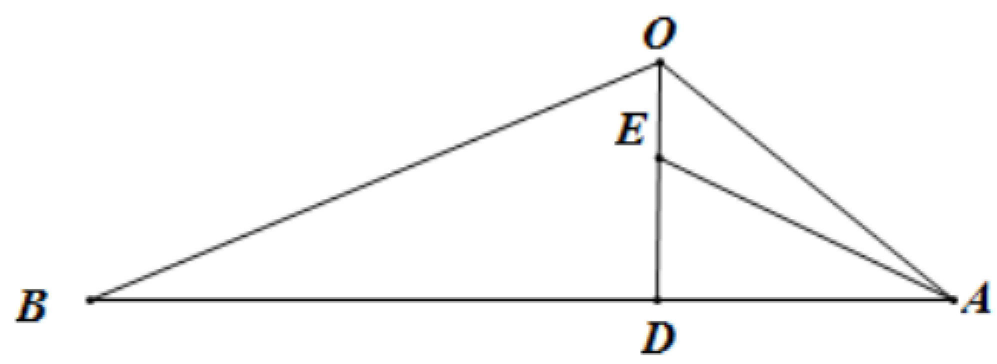
A．$4\pi$　B．$8\pi$　C．$12\pi$　D．$20\pi$

4．杭州亚运会将于 2023 年 9 月 23 日至 10 月 8 日举办．某班举行了以“迎亚运、讲文明、创典范”为主题的联欢晚会，原定的 5 个学生节目已排成节目单，开演前又临时增加了两个教师节目，如果将这两个教师节目插入到原节目单中，则这两个教师节目相邻的概率为（　　）

A．$\dfrac{1}{6}$　B．$\dfrac{1}{7}$　C．$\dfrac{1}{3}$　D．$\dfrac{2}{7}$

5．已知 $\triangle OAB$，$OA=1$，$OB=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-1$，过点 $O$ 作 $OD$ 垂直 $AB$ 于点 $D$，点 $E$ 满足 $\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{ED}$，

则 $\overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{EA}$ 的值为（　　）




A．$-\dfrac{3}{28}$　B．$-\dfrac{1}{21}$　C．$-\dfrac{2}{9}$　D．$-\dfrac{2}{21}$

6．已知 $a=2,b=5^{\frac{1}{3}},c=\left(2+e\right)^{\frac{1}{e}}$,，则 $a,b,c$ 的大小关系为（　　）

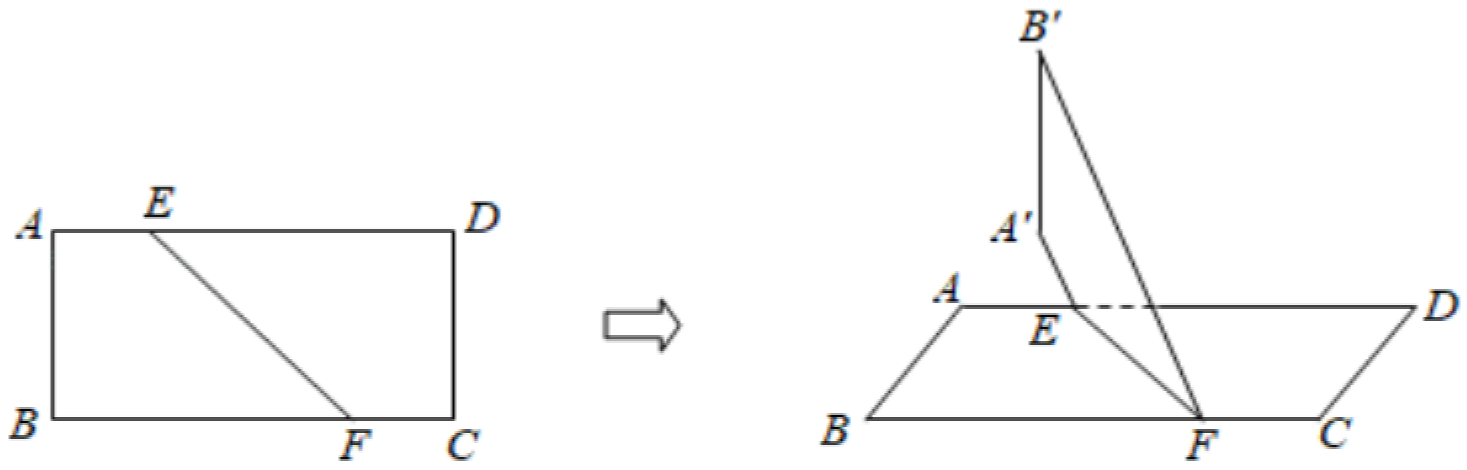
A．$b<c<a$　B．$c<b<a$　C．$b<a<c$　D．$c<a<b$

7．已知 $F_1$，$F_2$ 是椭圆和双曲线的公共焦点，$P$ 是它们的一个公共点，且 $\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{4}$，则椭圆和双曲线的

离心率乘积的最小值为（　　）

A．$\sqrt{2}$　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　C．$2\sqrt{2}$　D．2

8. 已知在矩形$ABCD$中，$AB=2$，$AD=4$，$E$，$F$分别在边$AD$，$BC$上，且$AE=1$，$BF=3$，如图所示，沿$EF$将四边形$AEFB$翻折成$A'EFB'$，设二面角$B'-EF-D$的大小为$\alpha$，在翻折过程中，当二面角$B'-CD-E$取得最大角，此时$\sin\alpha$的值为（　　）




A. $\dfrac{3}{5}$　　　　B. $\dfrac{4}{5}$　　　　C. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　　　D. $\dfrac{1}{3}$

**二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.**

9. 下列说法正确的是（　　）

A. 用简单随机抽样从含有50个个体的总体中抽取一个容量为10的样本，个体$m$被抽到的概率是0.2

B. 已知一组数据1，2，$m$，6，7的平均数为4，则这组数据的方差是5

C. 数据27，12，14，30，15，17，19，23的50%分位数是17

D. 若样本数据$x_1$，$x_2$，…，$x_{10}$的标准差为8，则数据$2x_1-1$，$2x_2-1$，…，$2x_{10}-1$的标准差为16

10. 已知函数$f(x)=\sin(\cos x)+\cos(\sin x)$，下列关于该函数结论正确的是（　　）

A. $f(x)$的图象关于直线$x=\dfrac{\pi}{2}$对称　　　　B. $f(x)$的一个周期是$2\pi$

C. $f(x)$的最大值为$\sin 1+1$　　　　D. $f(x)$是区间$\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$上的减函数

11. 已知正四棱锥$P-ABCD$的所有棱长均为$2\sqrt{2}$，$E$，$F$分别是$PC$，$AB$的中点，$M$为棱$PB$上异于$P$，$B$的一动点，则以下结论正确的是（　　）

A. 异面直线$EF$、$PD$所成角的大小为$\dfrac{\pi}{3}$　　　　B. 直线$EF$与平面$ABCD$所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

C. $\triangle EMF$周长的最小值为$\sqrt{6}+2\sqrt{2}$　　　　D. 存在点$M$使得$PB\perp$平面$MEF$

12. 已知定义域为R的函数$f(x)$在$(-1,0]$上单调递增，$f(1+x)=f(1-x)$，且图像关于$(2,0)$对称，

则$f(x)$（　　）

A. $f(0)=f(-2)$　　　　B. 周期$T=2$

C. 在$(2,3)$单调递减　　　　D. 满足$f(2021)>f(2022)>f(2023)$

## 第II卷（非选择题）

三、填空题：本题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分.

13．已知抛物线 $E$：$x^2=2py\left(p>0\right)$ 的焦点为 $F$，过点 $F$ 的直线 $l$ 与抛物线交于 $A$，$B$ 两点，与准线交于 $C$ 点，$F$ 为 $AC$ 的中点，且 $|AF|=3$，则 $p=$__________.

14. 在 $(x+a)^6$ 的展开式中的 $x^3$ 系数为 $160$，则 $a=$__________.

15．已知正实数 $a,b$ 满足 $\dfrac{8}{(b+1)^3}+\dfrac{6}{b+1}\le a^3+3a$，则 $2a+3b$ 的最小值是__________.

16. 函数 $f(x)=a^x+2bx+\mathrm{e}^2$，其中 $a$，$b$ 为实数，且 $a\in(0,1)$ .已知对任意 $b>3\mathrm{e}^2$，函数 $f(x)$ 有两个不同
零点，$a$ 的取值范围为____________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知 $a,b,c$ 分别是 $\Delta ABC$ 内角 $A,B,C$ 的对边，若 $\Delta ABC$ 同时满足下列四个条件中的三个：

（1）$a=\sqrt{3}$；（2）$b=2$；（3）$\dfrac{\sin B+\sin C}{\sin A}=\dfrac{a+c}{b-c}$；（4）$\cos^2(\dfrac{B-C}{2})-\sin B\sin C=\dfrac{1}{4}$

（1）满足有解三角形的需要组合有哪些？并说明理由；

（2）请在（1）所有组合中任选一组，求对应 $\Delta ABC$ 的面积。

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3,a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}-n^2+2n+1$

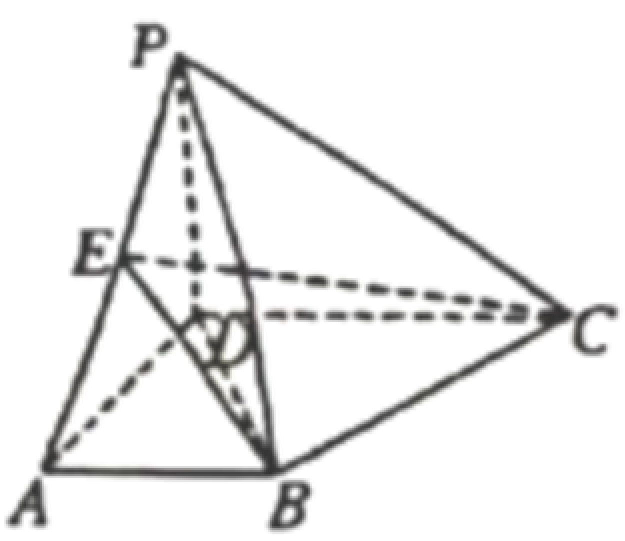
（1）求证：$\left\{\dfrac{a_n-n^2}{2^n}\right\}$ 是等差数列；

（2）令 $b_n=[\dfrac{a_n}{2^n}]$（$[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数），求使得 $b_1+b_2+\cdots+b_n\le 100$ 成立的最大正整数 $n$ 的值。

19. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为梯形，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，$\angle BAD=\angle CDA=90^\circ$，$AD=AB=1$，$CD=2$，$E$ 为 $PA$ 的中点.

(1) 证明：平面 $PBD\perp$ 平面 $BCE$;

(2) 若二面角 $P-BC-E$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$，求三棱锥 $P-BCE$ 的体积.




20. 法国数学家庞加莱是个喜欢吃面包的人，他每天都会到同一家面包店购买一个面包，该面包店的面包师声称自己所出售的面包的平均质量是 $1000g$，上下浮动不超过 $50g$，这句话用数学语言表达就是：每个面包的质量服从期望为 $1000g$，标准差为 $50g$ 的正态分布

（1）已知如下结论：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从 X 的取值中随机抽取 $k(k\in N^*,k\ge 2)$ 个数据，记这 $k$ 个数据的平均值为 Y，则随机变量 $Y\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{k})$，利用该结论解决下面问题：

（i）假设面包师的说法是真实的，随机购买 25 个面包，记随机购买 25 个面包的平均值为 Y，求 $P(Y\le 980)$；

（ii）庞加莱每天都会将买来的面包称重并记录，25 天后，得到的数据都落在 $(950,1050)$ 上，并经计算 25 个面包质量的平均值为 $978.72g$，庞加莱通过分析举报了该面包师，从概率角度说明庞加莱举报该面包师的理由；

（2）假设有两个相同的箱子装有面包（面包除颜色外，其他都一样），已知第一箱中共装有 6 个面包，其中黑色面包有 2 个；第二箱中共装有 8 个面包，其中黑色面包有 3 个；现随机挑选一箱，然后从该箱中随机取出 2 个面包，求取出黑色面包个数的分布列及数学期望。

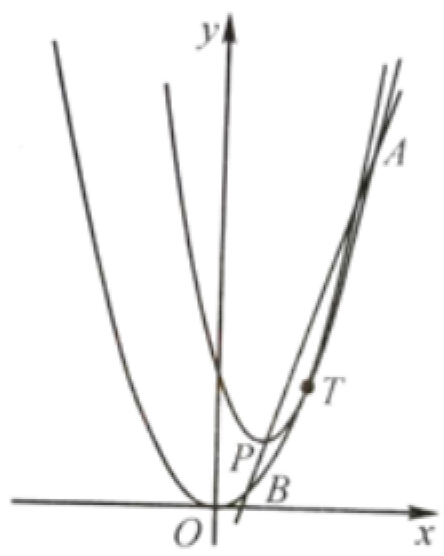
附：（1）随机变量 $\eta$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma\le\eta\le\mu+\sigma)=0.8627$，$P(\mu-2\sigma\le\eta\le\mu+2\sigma)=0.9545$；$P(\mu-3\sigma\le\eta\le\mu+3\sigma)=0.9973$

（2）通常把发生概率小于 0.05 的事件称为小概率事件，小概率事件基本不会发生。

21.已知抛物线 $C_1:y=x^2$，开口向上的抛物线 $C_2$ 与 $C_1$ 有一个公共点 $T(2,4)$，且在该点处有相同的切线，

（1）求所有抛物线 $C_2$ 的方程；

（2）设点 P 是抛物线 $C_2$ 上的动点，且与点 T 不重合，过点 P 且斜率为 $k$ 的直线 $l$ 交抛物线 $C_1$ 于 A, B 两点，其中 $|PA|\ge|PB|$，问是否存在实常数 $k$，使得 $\dfrac{|PA|}{|PB|}$ 为定值？若存在，求出实常数 $k$；若不存在，说明理由。




22. 已知 $f(x)=\begin{cases}1-x^2\ln x, & x>0\\ e^{-x-2}, & x\le 0\end{cases}$，

（I）当 $x\in(0,+\infty)$ 时，求 $f(x)$ 的最大值；

（II）若存在 $a\in[0,+\infty)$，使得关于 $x$ 的方程 $f(x)+ax^2+bx=0$ 有三个不相同的实数根，求实数 $b$ 的取值范围.

## 杭州二中 2022 学年第二学期高三年级 3 月考试参考答案

**一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.**

1. D　2. B　3. C　4. D　5. D　6. A　7. B　8. B

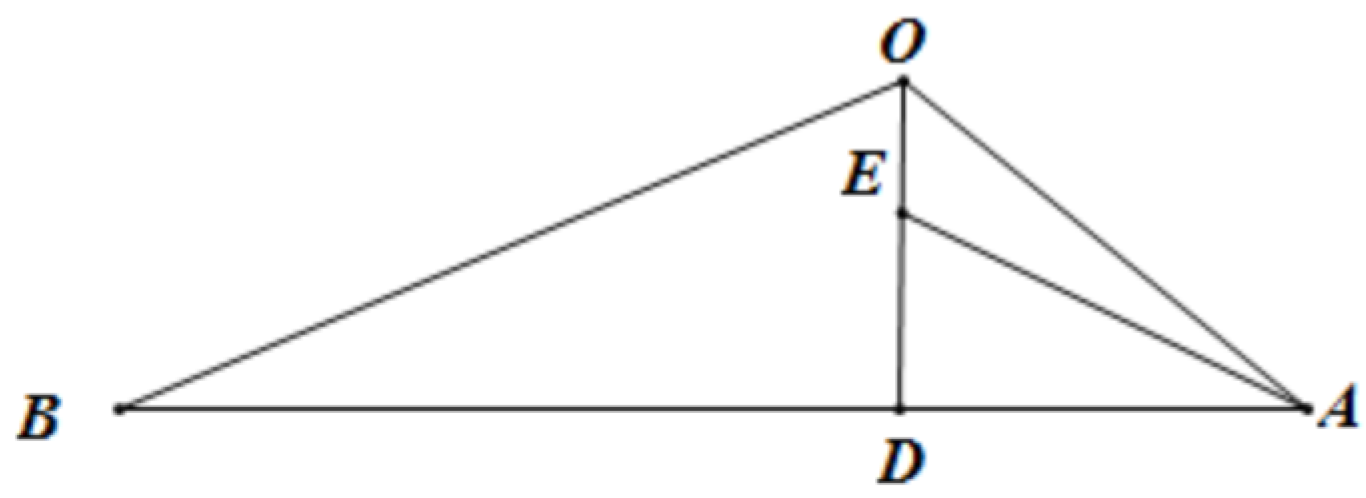
**二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**

9 AD　10. BC　11. BC　12. AC

**三、填空题：本题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分.**

13. $\dfrac{3}{2}$　14. 2　15. $4\sqrt{3}-3$　16. $\left[e^{-6},0\right)$

5.【解析】由题意，作出图形，如图，



$\because OA=1$，$OB=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-1$

$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\times2\cos\angle AOB=2\cos\angle AOB=-1$，$\therefore\cos\angle AOB=-\dfrac{1}{2}$，

由$\angle AOB\in(0,\pi)$可得$\angle AOB=\dfrac{2\pi}{3}$，

$\therefore AB=\sqrt{OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB}=\sqrt{7}$，

又$S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot\sin\angle AOB=\dfrac{1}{2}\cdot OD\cdot AB=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则$OD=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$，

$\therefore\overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{OE}\cdot\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}\right)=-2\overrightarrow{OE}^2=-\dfrac{2}{9}\cdot\overrightarrow{OD}^2=-\dfrac{2}{9}\times\dfrac{3}{7}=-\dfrac{2}{21}$. 故选：D.

6.【解析】由题意，可得$a=(2+2)^{\frac{1}{2}},b=(2+3)^{\frac{1}{3}},c=(2+e)^{\frac{1}{e}}$，

所以令$f(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\ln(2+x),(x>0)$，则$f'(x)=\dfrac{\dfrac{x}{x+2}-\ln(2+x)}{x^2}$，

令$g(x)=\dfrac{x}{x+2}-\ln(2+x),(x>0)$，则$g'(x)=\dfrac{-x}{(x+2)^2}<0$，

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，$g(x)<g(0)<0$，所以$f'(x)<0$恒成立，

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，

因为$2<e<3$，所以$f(2)>f(e)>f(3)$，即$\dfrac{1}{2}\ln(2+2)>\dfrac{1}{e}\ln(2+e)>\dfrac{1}{3}\ln(2+3)$，

所以$\ln(2+2)^{\frac{1}{2}}>\ln(2+e)^{\frac{1}{e}}>\ln(2+3)^{\frac{1}{3}}$，所以$4^{\frac{1}{2}}>(2+e)^{\frac{1}{e}}>5^{\frac{1}{3}}$，即$b<c<a$. 故选：A.

7. 解：如图，设椭圆的长半轴长为$a_1$，双曲线的半实轴长为$a_2$，

则根据椭圆及双曲线的定义：

$|PF_1|+|PF_2|=2a_1$，$|PF_1|-|PF_2|=2a_2$，$\therefore|PF_1|=a_1+a_2$，$|PF_2|=a_1-a_2$，

设$|F_1F_2|=2c$，$\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{4}$，则：在$\triangle PF_1F_2$中由余弦定理得，

$4c^2=(a_1+a_2)^2+(a_1-a_2)^2-2(a_1+a_2)(a_1-a_2)\cos\dfrac{\pi}{4}$，

化简得：$(2-\sqrt{2})a_1^2+(2+\sqrt{2})a_2^2=4c^2$，即$\dfrac{2-\sqrt{2}}{e_1^2}+\dfrac{2+\sqrt{2}}{e_2^2}=4$，

又$\because \dfrac{2-\sqrt{2}}{e_1^{2}}+\dfrac{2+\sqrt{2}}{e_2^{2}} \geq 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{e_1e_2}$，$\therefore \dfrac{1}{e_1e_2} \leq \sqrt{2}$，即$e_1\cdot e_2 \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

即椭圆和双曲线的离心率乘积的最小值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

8. 过$B$作$EF$的垂线交$EF$与$O$，交$AD$于$M$，$CD$于$G$，设$B'$在平面$AC$内的投影为$H$，则$H$在直线$BM$上，过$H$作$CD$的垂线，垂足为$K$，则$\angle B'KH$为二面角$B'-CD-E$的平面角，设$\angle B'OH=\alpha$，由题意$B'O=BO=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$，

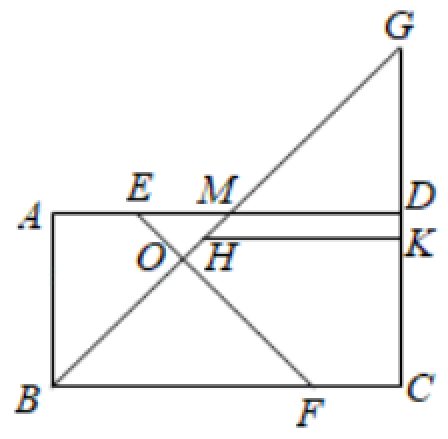


图1

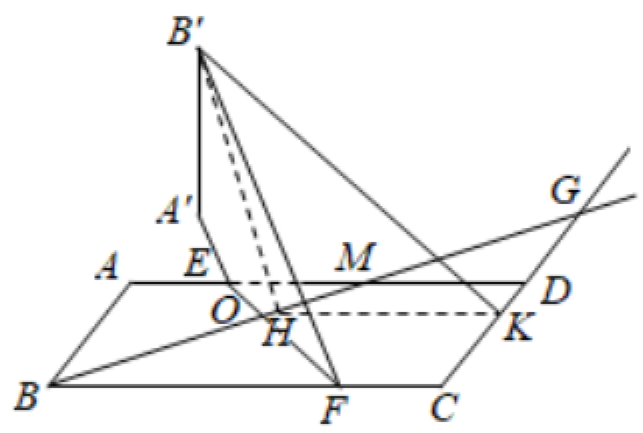


图2

$B'H=B'O\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\sin\alpha$，$BH=BO+B'O\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{2}}(1+\cos\alpha)$，由$\angle GBC=45°$，$BG=4\sqrt{2}$，

$HG=BG-BH=4\sqrt{2}-\dfrac{3}{\sqrt{2}}(1+\cos\alpha)$，$HK=\dfrac{1}{\sqrt{2}}HG=4-\dfrac{3}{2}(1+\cos\alpha)=\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}\cos\alpha$，

$\tan\angle B'KH=\dfrac{B'H}{HK}=3\sqrt{2}\times\dfrac{\sin\alpha}{5-3\cos\alpha}$，

令$t=\dfrac{\sin\alpha}{5-3\cos\alpha}$，可得$\sin\alpha+3t\cos\alpha=5t \leq \sqrt{1+9t^2}$解得$t \leq \dfrac{1}{4}$，所以$\tan\theta \leq \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，$t=\dfrac{1}{4}$即

$\dfrac{\sin\alpha}{5-3\cos\alpha}=\dfrac{1}{4}$，也即$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$时，角$\theta$最大.

10. 【解析】由$f(x)=\sin(\cos x)+\cos(\sin x)$，

对于A，$f(\pi-x)=\sin(\cos(\pi-x))+\cos(\sin(\pi-x))=-\sin(\cos x)+\cos(\sin x)\neq f(x)$，

故A不正确；

对于B，$f(2\pi+x)=\sin(\cos(2\pi+x))+\cos(\sin(2\pi+x))=\sin(\cos x)+\cos(\sin x)=f(x)$，故B正确；

对于C，$-1\leq\cos x\leq 1$，所以$y=\sin(\cos x)$的最大值为$\sin 1$，

当$\cos x=1$时，$y=\cos(\sin x)=\cos 0=1$，取得最大值，

所以$f(x)$的最大值为$\sin 1+1$，故C正确；

对于D，$y=\cos x$在区间$\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$上是增函数，且$\cos x\in(-1,0)\subseteq\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$，

所以$y=\sin(\cos x)$在区间$\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$上是增函数；$y=\sin x$在区间$\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$上是减函数，

且$\sin x\in(-1,0)\subseteq\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$，所以$y=\cos(\sin x)$在区间$\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$上是减函数，

且$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)-f(\pi)=\sin 1+\cos 1-1>0, f\left(\frac{3\pi}{2}\right)>f(\pi)$，故 D 错误；故选：BC.

11.【详解】如图$1$，取$PD$的中点$Q$，连接$EQ$，$AQ$，

因为$E$，$F$分别是$PC$，$AB$的中点，

所以$EQ\parallel DC\parallel AF$，且$EQ=AF$，所以四边形$AFEQ$为平行四边形，

则$EF\parallel AQ$，又正四棱锥$P-ABCD$的所有棱长均为$2\sqrt{2}$，

则$AQ\perp PD$，所以异面直线$EF$，$PD$所成角为$\frac{\pi}{2}$，故 A 错误；

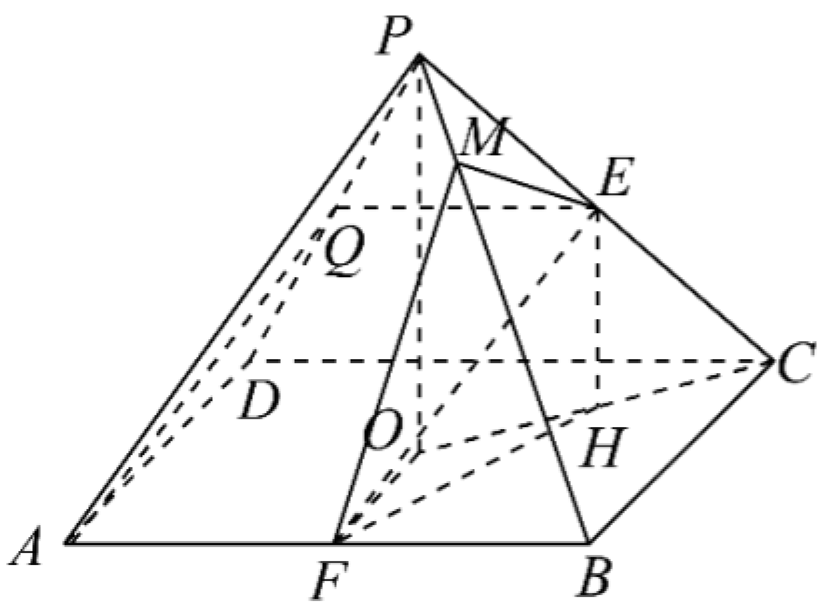


图1

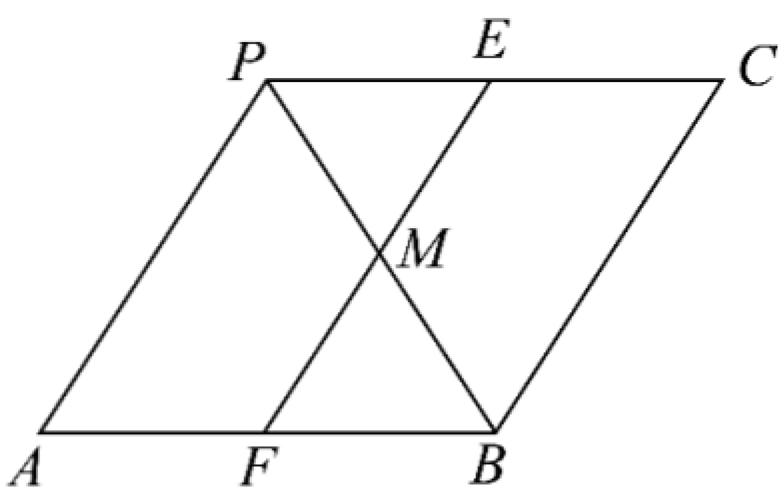


图2

设正方形$ABCD$的中心为$O$，连接$OC$，$PO$，则$PO\perp$平面$ABCD$，$OC=OP=2$，

设$OC$的中点为$H$，连接$EH$，$FH$，则$EH\parallel OP$，且$EH\perp$平面$ABCD$，

所以$\angle EFH$为直线$EF$与平面$ABCD$所成角，所以$EH=\frac{1}{2}PO=1$，

$\triangle OFH$中，$OH=1$，$OF=\sqrt{2}$，$\angle FOC=135^{\circ}$，

所以由余弦定理可得$FH=\sqrt{5}$，所以$EF=\sqrt{EH^2+FH^2}=\sqrt{6}$，

所以$\sin\angle EFH=\frac{EH}{EF}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，故 B 正确；

将正$\triangle PAB$和$\triangle$PBC沿$PB$翻折到一个平面内，如图$2$，

当$E$，$M$，$F$三点共线时，$ME+MF$取得最小值，

此时，点$M$为$PB$的中点，$ME+MF=BC=2\sqrt{2}$，

所以$\vee EMF$周长的最小值为$\sqrt{6}+2\sqrt{2}$，故 C 正确；

若$PB\perp$平面$MEF$，则$PB\perp ME$，此时点$M$为$PB$上靠近点$P$的四等分点，

而此时，$PB$与$FM$显然不垂直，故 D 错误；故选：BC.

**12.【详解】由$f(1+x)=f(1-x)$知$f(x)$的对称轴为$x=1$，所以$f(0)=f(2)$,**

**由$f(1+x)=f(1-x)$知：$f(2+x)=f(-x)$，**

**又图像关于$(2,0)$对称，即$f(2+x)=-f(2-x)$，故$f(4+x)=-f(-x)$，**

所以 $-f(2+x)=f(4+x)$，即 $-f(x)=f(2+x)$，

所以 $f(x)=f(x+4), f(x)$ 的周期为 4，$f(0)=f(-2)$，故 A 正确，B 错误；

因为 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上单调递增，且 $T=4$，所以 $f(x)$ 在 $[3,4]$ 上单调递增，

又图像关于 $(2,0)$ 对称，所以 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，

因为关于 $x=1$ 对称，所以 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递减，又关于 $(2,0)$ 对称，在 $(2,3)$ 单调递减，

故 C 正确；

根据周期性，$f(2021)=f(1), f(2022)=f(2), f(2023)=f(3)$，

因为关于 $x=1$ 对称，所以 $f(2)=f(0)$，因为周期 $T=4$，所以 $f(3)=f(-1)$；

结合 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递减，且 $[-1,0]$ 上单调递增，

故 $f(3)=f(-1)<f(0)=f(2)<f(1)$，即 $f(2021)>f(2022)>f(2023)$，故 D 正确.

故选：ACD.

15．设 $f(x)=x^3+3x, x>0$，则函数为增函数，

$\because \frac{8}{(b+1)^3}+\frac{6}{b+1}\le a^3+3a$，$\therefore \left(\frac{2}{b+1}\right)^3+\frac{3\times 2}{b+1}\le a^3+3a$，即 $f\left(\frac{2}{b+1}\right)\le f(a)$ $\therefore a\ge\frac{2}{b+1}$，

$\therefore 2a+3b\ge\frac{4}{b+1}+3b=\frac{4}{b+1}+3(b+1)-3\ge 2\sqrt{\frac{4}{b+1}\cdot 3(b+1)}-3=4\sqrt{3}-3$，

当且仅当 $a=\frac{2}{b+1}, \frac{4}{b+1}=3(b+1)$，即 $a=\sqrt{3}, b=\frac{2\sqrt{3}}{3}-1$ 取等号.

故 16.【解析】因为 $f(x)$ 有两个不同零点 $\Leftrightarrow f(x)=0$ 有两个不相等的实根

即 $a^x+2bx+\mathrm{e}^2=0$ 有两个不相等的实根；所以 $\mathrm{e}^{x\ln a}+2bx+\mathrm{e}^2=0$，令 $t=x\ln a$，

则 $\mathrm{e}^t+\frac{2bt}{\ln a}+\mathrm{e}^2=0$，$t$ 显然不为零，所以 $-\frac{2b}{\ln a}=\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^2}{t}$，因为 $a\in(0,1)$，$b>3\mathrm{e}^2$，

所以 $-\frac{2b}{\ln a}>0$，所以 $t>0$；令 $g(t)=\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^2}{t}$ $(t>0)$，则 $g'(t)=\frac{t\mathrm{e}^t-(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^2)}{t^2}$；

令 $h(t)=t\mathrm{e}^t-(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^2)$ $(t>0)$，则 $h'(t)=\mathrm{e}^t+t\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t=t\mathrm{e}^t>0$，

所以 $h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $h(2)=0$，

所以当 $t\in(0,2)$ 时，$h(t)<0$；当 $t\in(2,+\infty)$ 时，$h(t)>0$；

所以当 $t\in(0,2)$ 时，$g'(t)<0$；当 $t\in(2,+\infty)$ 时，$g'(t)>0$；

故 $g(t)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增；

所以$g(t)_{\min}=g(2)=e^2$，所以$-\dfrac{2b}{\ln a}\ge e^2$；

又$b>3e^2$，所以$\dfrac{b}{e^2}>3$，所以$-\dfrac{\ln a}{2}\le 3$ 即$\ln a\ge -6$，$a\ge e^{-6}$，

又$a\in(0,1)$，所以$a\in\left[e^{-6},1\right)$；故答案为：$\left[e^{-6},1\right)$.

**答案为：$4\sqrt{3}-3$.**

**四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.**

17.（1）对于(3)$:\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{a+c}{b-c}\Rightarrow\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore B=\dfrac{2\pi}{3}$

对于(4)$:\dfrac{1+\cos(B-C)}{2}-\sin B\sin C=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\cos(B+C)=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$

$\because$(3)(4)不能同时满足，$\therefore$满足有解三角形的序号组合为(1)(2)(3),(1)(2)(4)

（2）选（1）（2）（3） $a=\sqrt{3},b=2,B=\dfrac{2\pi}{3}$

$$\therefore\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{c^2-1}{2\sqrt{3}c}=-\frac{1}{2},\ \therefore c^2+\sqrt{3}c-1=0$$

$$\because c>0,\therefore c=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2},\ \therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{3(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{8}$$

选（1）（2）（4） $a=\sqrt{3},b=2,A=\dfrac{\pi}{3}$

$$\therefore\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{c^2+1}{4c}=\frac{1}{2},\ \therefore c^2-2c+1=0$$

$$\therefore c=1,\ \therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

18.（1） $a_{n+1}-(n+1)^2=2(a_n-n^2)+2^{n+2}$，$\therefore\dfrac{a_{n+1}-(n+1)^2}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n-n^2}{2^n}+2$

$\therefore\left\{\dfrac{a_n-n^2}{2^n}\right\}$是首项为$\dfrac{a_1-1}{2}=1$,公差$d=2$的等差数列

（2）由(1)得$:\dfrac{a_n-n^2}{2^n}=2n-1\Rightarrow a_n=2^n(2n-1)+n^2$

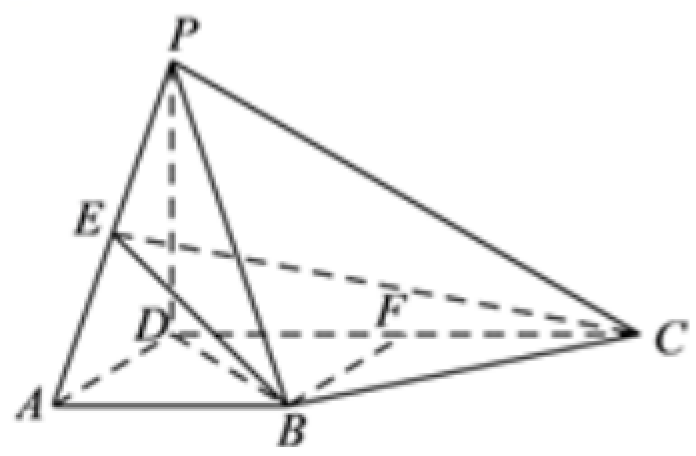
$$b_n=[\frac{a_n}{2^n}]=[(2n-1)+\frac{n^2}{2^n}]=2n-1+[\frac{n^2}{2^n}]，\ 令c_n=\frac{n^2}{2^n}$$

$\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{n})^2$ $\therefore$当$n\ge 3$时，$c_{n+1}<c_n$ $c_1=\dfrac{1}{2},c_2=1,c_3=\dfrac{9}{8},c_4=1$ ，

当$n\geq 5$时，$c_n\in(0,1)$

$\therefore b_1+b_2+\cdots+b_n=n^2+3,(n\geq 5)$，$\therefore n^2+3\leq 100\Rightarrow n\leq 9$

满足条件的最大整数$n$为9




19. 证明：(1) 因为$PD\perp$底面$ABCD$，$BC\subset$面$ABCD$，则$PD\perp BC$，

由$\angle BAD=90^\circ$，$AD=AB=1$，

则$BD=\sqrt{2}$，又$\angle CDA=90^\circ$，则$AB//DC$，

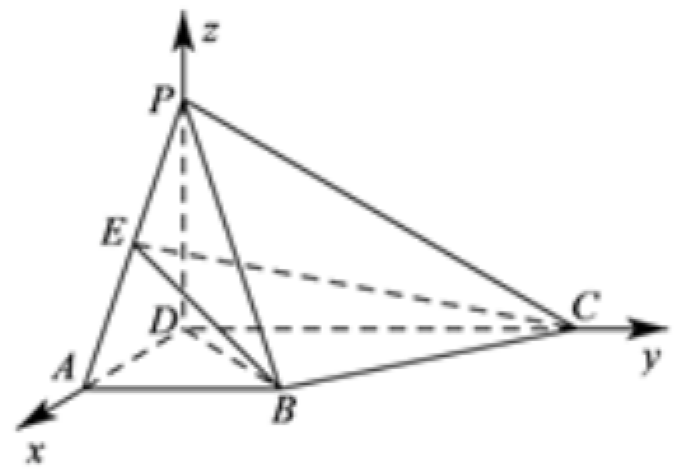
取$F$为$CD$中点，连接$BF$，

易知$ABFD$为正方形，则$BF=1$，又$CD=2$，即$FC=1$，所以$BC=\sqrt{2}$，

综上$BC^2+BD^2=CD^2$，即$BD\perp BC$，

又$BD\cap PD=D$，则$BC\perp$面$PBD$，又$BC\subset$面$BCE$，

所以平面$PBD\perp$平面$BCE$；




解：(2) 由题设，以$DA$，$DC$，$DP$分别为$x$，$y$，$z$轴建立空间直角坐标系，设$PD=m$，

则$D(0,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,2,0)$，$E(\frac{1}{2},0,\frac{m}{2})$，$P(0,0,m)$，

所以$\overrightarrow{PB}=(1,1,-m)$，$\overrightarrow{EB}=(\frac{1}{2},1,-\frac{m}{2})$，$\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$，

设$\overrightarrow{\alpha}=(x,y,z)$为面$PBC$的一个法向量，则

$\begin{cases}\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{BC}=-x+y=0\\ \overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{PB}=x+y-zm=0\end{cases}$，令$x=1$，则$\overrightarrow{\alpha}=(1,1,\frac{2}{m})$，

设$\overrightarrow{\beta}=(a,b,c)$为面$EBC$的一个法向量，则$\begin{cases}\overrightarrow{\beta}\cdot\overrightarrow{BC}=-a+b=0\\ \overrightarrow{\beta}\cdot\overrightarrow{EB}=\frac{a}{2}+b-\frac{cm}{2}=0\end{cases}$，

令$a=1$，则$\overrightarrow{\beta}=(1,1,\frac{3}{m})$，

所以$|\cos\langle\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}\rangle|=|\frac{\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}}{|\overrightarrow{\alpha}||\overrightarrow{\beta}|}|=\frac{2+\frac{6}{m^2}}{\sqrt{2+\frac{4}{m^2}}\cdot\sqrt{2+\frac{9}{m^2}}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$，整理得$\frac{9}{m^4}-\frac{6}{m^2}+1=0$，

所以$m=\sqrt{3}$，即$PD=\sqrt{3}$，易得$PA=2$，$PC=\sqrt{7}$，

由$PD\perp$底面$ABCD$，$AB\subset$面$ABCD$，则$PD\perp AB$，又$\angle BAD=90^\circ$，即$AD\perp AB$，

由$PD\cap AD=D$，则$AB\perp$面$PAD$，$PA\subset$面$PAD$，即$AB\perp PA$，

所以在直角$\triangle PAB$中，$PB=\sqrt{5}$，

在$\triangle PBC$中，$PB=\sqrt{5}$，$PC=\sqrt{7}$，$BC=\sqrt{5}$，即$PB^2+BC^2=PC^2$，则$PB\perp BC$，

所以 $S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

由上有 $\overrightarrow{EB}=(\frac{1}{2},1,-\frac{\sqrt{3}}{2})$ 且面 $PBC$ 的一个法向量 $\overrightarrow{\alpha}=(1,1,\frac{2}{\sqrt{3}})$，

则 $|\cos\langle\overrightarrow{EB},\overrightarrow{\alpha}\rangle|=|\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{10}{3}}}|=\frac{\sqrt{15}}{20}$，故 $E$ 到面 $PBC$ 的距离.

$d=|\overrightarrow{EB}||\cos\langle\overrightarrow{EB},\overrightarrow{\alpha}\rangle|=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{15}}{20}=\frac{\sqrt{30}}{20}$，

所以 $V_{P-BCE}=\frac{1}{3}\cdot d\cdot S_{\triangle PBC}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{30}}{20}\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{12}$.

20.（1）(i)假设面包师说法是真实的，则每个面包的质量 $X:\ N(1000,50^2)$，

由已知结论得：$Y:\ N(1000,10^2)$，$\therefore P(Y\le 980)=\frac{1-0.9545}{2}=0.02275$

(ii)由附（2）得：事件”$P(Y\le 980)$”为小概率事件

25 个面包质量的平均值 $Y=978.72<980$，小概率事件”$P(Y\le 980)$”发生，

所以庞加莱认为面包师的说法不真实，进行了举报。

（2）由题意，设随机挑选一箱，取出两个面包，其中黑色面包的个数为 $\xi$，

则 $\xi$ 的取值为 $0,1,2$

设 $a_i=$“所取两个面包来自第 $i$ 箱”（$i=1,2$） $\therefore P(a_1)=P(a_2)=\frac{1}{2}$

设 $b_i=$“所取两个面包有 $i$ 个黑色面包” $i=0,1,2$，由全概率公式得：

$$P(\xi=2)=P(b_2|a_1)P(a_1)+P(b_2|a_2)P(a_2)=\frac{1}{2}\times\frac{C_2^2}{C_6^2}+\frac{1}{2}\times\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{73}{840}$$

$$P(\xi=1)=P(b_1|a_1)P(a_1)+P(b_1|a_2)P(a_2)=\frac{1}{2}\times\frac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}+\frac{1}{2}\times\frac{C_3^1C_5^1}{C_8^2}=\frac{449}{840}$$

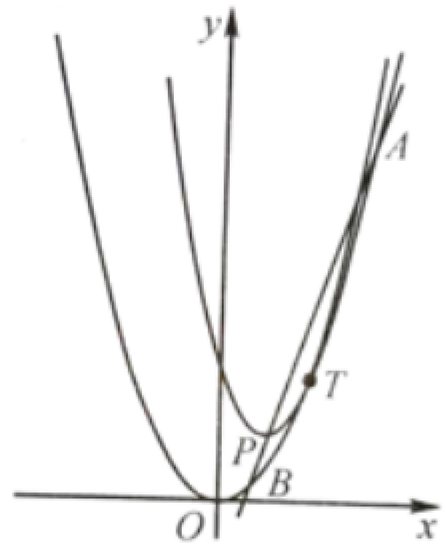
$$P(\xi=0)=P(b_0|a_1)P(a_1)+P(b_0|a_2)P(a_2)=\frac{1}{2}\times\frac{C_4^2}{C_6^2}+\frac{1}{2}\times\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{53}{140}$$

所以黑色面包个数 $\xi$ 的分布列为：

| $\xi$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{53}{140}$ | $\frac{449}{840}$ | $\frac{73}{840}$ |

$$\therefore E(\xi)=0\times\frac{53}{140}+1\times\frac{449}{840}+2\times\frac{73}{840}=\frac{17}{24}$$

21.（1） 设$C_2: y=ax^2+bx+c,(a>0)$， $y'=2ax+b$，




$C_1: y=x^2 \Rightarrow y'=2x$

在$T(2,4)$处有相同的切线$\Rightarrow 4a+b=4 \Rightarrow b=4-4a$

$\therefore y=ax^2+(4-4a)x+c$过$(2,4) \Rightarrow c=4a-4$

满足条件的$C_2: y=ax^2+(4-4a)x+(4a-4)$

即：$y=a(x-2)^2+4(x-1),(a>0$且$a\neq 1)$

（2）当$|PB|\to 0$时，若$\dfrac{|PA|}{|PB|}$为常数，则$|PA|\to 0$，则$l$即为公共点 T 处的切线

故若存在，$k=4$ 下面证明：当$k=4$时，$\dfrac{|PA|}{|PB|}$为常数

设$P(t,a(t-2)^2+4(t-1))$，$\begin{cases} y=x^2 \\ y=4(x-t)+a(t-2)^2+4(t-1) \end{cases}$

$\therefore x^2-4(x-t)-a(t-2)^2-4(t-1)=0$，设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

$\dfrac{|PA|}{|PB|}=\dfrac{|x_1-t|}{|x_2-t|}$， 令m=x−t$\Rightarrow$x=m+t， $\therefore \dfrac{|PA|}{|PB|}=\dfrac{|m_1|}{|m_2|}$

$\therefore (m+t)^2-4m-a(t-2)^2-4(t-1)=0 \Rightarrow m^2+(2t-4)m+t^2-a(t-2)^2-4(t-1)=0$

$\therefore \begin{cases} m_1+m_2=4-2t \\ m_1m_2=t^2-a(t-2)^2-4(t-1) \end{cases}$， $\therefore m_1{}^2+m_2{}^2+2m_1m_2=4(t-2)^2$

$\therefore m_1{}^2+m_2{}^2=4(t-2)^2-2t^2+2a(t-2)^2+8(t-1)=2t^2+2a(t-2)^2-8(t-1)$

$\therefore \dfrac{m_1{}^2+m_2{}^2}{m_1m_2}=\dfrac{(2+2a)t^2-(8a+8)t+8a+8}{(1-a)t^2-(4-4a)t-4a+4}=\dfrac{2(a+1)}{1-a}$为定值

$y_2-y_1=(a-1)x^2+4(1-a)x+4(a-1)=(a-1)(x-2)^2$

（1） 当$a>1$时，$y_2>y_1 \Rightarrow A,B$在点$P$的两侧$\dfrac{|PA|}{|PB|}=\dfrac{|x_1-t|}{|x_2-t|}=-\dfrac{m_1}{m_2}>1$

令$t=\dfrac{m_1}{m_2} \Rightarrow t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{2(a+1)}{1-a} \Rightarrow (1-a)t^2-2(a+1)t+1-a=0$

$\therefore t=\dfrac{a+1\pm 2\sqrt{a}}{1-a}$， Q$t<-1,\therefore t=\dfrac{a+1-2\sqrt{a}}{1-a}$为定值

（2） 当$0<a<1$时，$y_2<y_1\Rightarrow A,B$在点$P$的同侧 $\dfrac{|PA|}{|PB|}=\dfrac{|x_1-t|}{|x_2-t|}=\dfrac{m_1}{m_2}>1$

$\because t>1,\therefore t=\dfrac{a+1+2\sqrt{a}}{1-a}$为定值

22. （1） $f'(x)=-2x\ln x-x=-x(2\ln x+1)$

当$x<\dfrac{1}{\sqrt{e}}$时，$f'(x)>0,f(x)$单调递增，

当$x>\dfrac{1}{\sqrt{e}}$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，所以$f(x)_{\max}=f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)=1+\dfrac{1}{2e}$

（2） $f(x)+ax^2+bx=0$,验证$x=0$不是方程的根，所以原方程的根等价于

$\dfrac{f(x)}{x}=-ax-b$ 的根，记$A=-a\le 0,B=-b$，令$t(x)=Ax+B,A\le 0$，

$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{e^{-x-2}}{x}(x<0)$，$g'(x)=\dfrac{-(x+1)e^{-x-2}}{x^2},g'(x)=0\Rightarrow x=-1$为极大值点，

当$B>2\sqrt{2}$时，$t(x)>B>-\dfrac{1}{e}=g(-1)\ge g(x)(x<0)$ 所以$g(x)=t(x)$在$x<0$无实数根

$x>0$时，$g(x)=t(x)\Leftrightarrow h(x)=\dfrac{1}{x^2}-\ln x-\dfrac{B}{x}=A$……①

$h'(x)=-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{B}{x^2}=\dfrac{x^2-Bx+2}{-x^3}$ $h(x)$有两个极值点$0<x_1<x_2,x_2=\dfrac{B+\sqrt{B^2-8}}{2}$

$x_2h(x_2)=\dfrac{1}{x_2}-x_2\ln x-B=-\dfrac{3}{4}B-\sqrt{B^2-8}-\dfrac{B+\sqrt{B^2-8}}{2}\ln\dfrac{B+\sqrt{B^2-8}}{2}$

$<-\dfrac{3}{4}\times 2\sqrt{2}-\dfrac{2\sqrt{2}}{2}\ln\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}-\sqrt{2}\ln\sqrt{2}<0$，所以$h(x_2)<0$ 存在$A$使①有三个实根

所以$B>2\sqrt{2}$满足条件.

当$B\le 2\sqrt{2}$时，$h'(x)\le 0,h(0_+)>0$,所以①仅有一个正根，

要使$\dfrac{e^{-x-2}}{x}=Ax+B$有两个负根，则$B\le g(x)_{\max}=-\dfrac{1}{e}(x<0)$，

综上所述$B\in(-\infty,-\dfrac{1}{e}]\cup\left(2\sqrt{2},+\infty\right)$，即$b\in(-\infty,-2\sqrt{2})\cup[\dfrac{1}{e},+\infty)$.