天一大联考
2022—2023 学年(下)高二年级期中考试
数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案 A

命题意图 本题考查导数的计算及几何意义.

解析 因为$f'(x)=1+4\cos x$,所以$f'(0)=5$,又$f(0)=0$,所以曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y-0=5(x-0)$,即$5x-y=0$.

2. 答案 D

命题意图 本题考查随机变量的分布列.

解析 依题意,$\frac{1}{4}+1-4q+q=1$,解得$q=\frac{1}{12}$.

3. 答案 C

命题意图 本题考查简单的排列组合问题.

解析 每人有 5 种不同的购买选择,总的购买选择有$5\times5\times5=125$种.

4. 答案 D

命题意图 本题考查直线与圆的位置关系.

解析 易知C的圆心为坐标原点O,设O到直线l的距离为d,因为圆C与直线l相切,所以$d=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{9+16}}=2$,解得$m=100$.

5. 答案 B

命题意图 本题考查导数的运算性质.

解析 令$x=0$,得$f(0)=1+f(0)(0-2)$,解得$f(0)=\frac{1}{3}$,所以$f(x)=e^x+f'(0)x^2+\frac{1}{3}(x-2)$,$f'(x)=e^x+2f'(0)x+\frac{1}{3}$,令$x=0$,得$f'(0)=e^0+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$,所以$f(x)=e^x+\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}(x-2)$,$f'(x)=e^x+\frac{8}{3}x+\frac{1}{3}$,所以$f'(1)=e+3$.

6. 答案 C

命题意图 本题考查空间向量的线性运算.

解析 由图可得$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}-(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})=-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CD}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}-(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})-\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}-\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$.

7. 答案 A

命题意图 本题考查利用导数研究函数的单调性.

解析 令函数$g(x)=\frac{f(x)+x}{e^x}$,求导得$g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)-x+1}{e^x}>0$,因此函数$g(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增,于是得$g(2\,023)>g(2\,022)$,即$\frac{f(2\,023)+2\,023}{e^{2\,023}}>\frac{f(2\,022)+2\,022}{e^{2\,022}}$,整理得$f(2\,023)-ef(2\,022)>2\,022e-2\,023$.

8. **答案** C

命题意图 本题考查分步和分类计数原理的综合应用.

解析 若甲得 7 票,则只有 1 种情况;

若甲得 6 票,剩下的 1 票投给另外 3 名同学中 1 人,则有 $C_3^1=3$ 种情况;

若甲得 5 票,剩下的 2 票可能投给 1 名同学或 2 名同学,则有 $C_3^1+C_3^2=6$ 种情况;

若甲得 4 票,剩下的 3 票可能投给 2 名同学或 3 名同学,则有 $A_3^2+C_3^3=7$ 种情况.

综上可得一共有 $1+3+6+7=17$ 种投票结果.

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. **答案** BD

命题意图 本题考查相互独立事件的定义.

解析 若 $A\subseteq B$,则 $P(A\cup B)=P(B)=\dfrac{3}{4}$,故 A 错误;若 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$,则 A,B 相互独立,显然本题符合该等式,故 B 正确;若 A 与 B 相互独立,则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{7}{8}$,故 C 错误;若 A 与 B 相互独立,则 $P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})=[1-P(A)][1-P(B)]=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{1}{8}$,故 D 正确.

10. **答案** AC

命题意图 本题考查等差数列的性质.

解析 因为 $S_3<0,a_3>0$,所以 $S_2=S_3-a_3<S_3<0$,故 A 正确;因为 $S_3=3a_2<0$,所以 $a_2<0$,则公差 $d=a_3-a_2=a_5-a_4>0$,故 B 错误;等差数列 $\{a_n\}$ 为递增数列,因为 $a_3>0$,所以 $a_4>0,a_6>0$,且 $a_4\neq a_6$,则 $a_4+a_6>2\sqrt{a_4a_6}$,所以 $2a_5=a_4+a_6>2\sqrt{a_4a_6}$,所以 $a_5^2>a_4a_6$,故 C 正确;当 $a_1=-3,d=2$ 时,$a_2=-1,a_3=1,S_2=-4<S_3=-3<0$,此时 $a_2+a_3=0$,故 D 错误.

11. **答案** BCD

命题意图 本题考查椭圆与圆的性质及直线与圆的位置关系.

解析 设椭圆 C 的长半轴长为 $a(a>0)$,短半轴长为 $b(b>0)$,半焦距为 $c(c>0)$. 由题可知 $a=4,b=3,c=\sqrt{7}$. 当 $\triangle PF_1F_2$ 的面积最大时,点 P 位于短轴的端点处,故有 $S=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{7}\times3=3\sqrt{7}$,故 A 错误;以线段 F_1F_2 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=7$,圆心到直线 $x-y+\sqrt{14}=0$ 的距离为 $\dfrac{|\sqrt{14}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{7}$,故以线段 F_1F_2 为直径的圆与直线 $x-y+\sqrt{14}=0$ 相切,故 B 正确;易知点 P 恒在以线段 F_1F_2 为直径的圆外,故 $0°\leqslant\angle F_1PF_2<90°$,故 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=|\overrightarrow{PF_1}||\overrightarrow{PF_2}|\cos\angle F_1PF_2>0$,故 C 正确;设点 P 的坐标为 (x_0,y_0),若 $\angle F_1PF_2=90°$,联立方程组得 $\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{16}+\dfrac{y_0^2}{9}=1,\\ \dfrac{y_0}{x_0-\sqrt{7}}\cdot\dfrac{y_0}{x_0+\sqrt{7}}=-1,\end{cases}$ 此方程组无解,若 $\angle PF_1F_2=90°$ 或 $\angle PF_2F_1=90°$,易得 $y_0=\pm\dfrac{9}{4}$,故 D 正确.

12. **答案** ACD

命题意图 本题考查指数的大小比较及导数的应用.

解析　由题可知$f'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$,所以当$x\in(0,e^{\frac{1}{2}})$时,$f'(x)>0$,当$x\in(e^{\frac{1}{2}},+\infty)$时,$f'(x)<0$,所以$f(x)$在$(0,e^{\frac{1}{2}})$上单调递增,在$(e^{\frac{1}{2}},+\infty)$上单调递减,所以$f(x)_{\max}=f(e^{\frac{1}{2}})=\dfrac{1}{2e}$. 又$f(1)=0$,所以当$x>1$时,$f(x)>0$恒成立. 因为$a=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}>e^0=1$,$a=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}<e$,所以$1<a<e$,$b=0.5^{\frac{e}{2}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{e}{2}}<\dfrac{1}{2}$,显然$b<a$,故B错误;$c=\dfrac{3}{e^{\frac{1}{2}}-1}>\dfrac{3}{4^{\frac{1}{2}}-1}=3>e$,故有$c>a$,故A正确;因为$a,c\in(e^{\frac{1}{2}},+\infty)$,$a<c$,所以$f(c)<f(a)$,故C正确;因为$b<\dfrac{1}{2}$,所以$f(b)<0$,又$f(a)>0$,所以$f(b)<f(a)$,故D正确.

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 答案　$n-1$

命题意图　本题考查等差数列的性质.

解析　由$a_5=2a_3$,得$a_3+2=2a_3$,所以$a_3=2$,所以$a_n=a_3+(n-3)=n-1$.

14. 答案　252

命题意图　本题考查二项式定理的综合应用.

解析　因为$(2-3x)^8=[3-(1+3x)]^8$,所以其展开式的通项为$T_{r+1}=(-1)^r3^{8-r}\cdot C_8^r(1+3x)^r$,令$r=6$,得$a_6=(-1)^6 3^2\cdot C_8^6=252$.

15. 答案　$(-6,-2)$

命题意图　本题考查利用导数研究函数的极值与最值.

解析　因为$f(x)=x^3-12x$,所以$f'(x)=3x^2-12$,令$f'(x)=0$,得$x=\pm2$,分析可知$x=-2$为$f(x)$的极大值点,要使$f(x)$在$(a,a+4)$上存在最大值,则$a<-2<a+4$,解得$-6<a<-2$.

16. 答案　$\left(1,\dfrac{3}{2}\right]$

命题意图　本题考查双曲线的定义和性质.

解析　设双曲线Γ的半焦距为$c(c>0)$. 因为$|AM|+2|AF_2|=|AF_1|$,$|AF_1|-|AF_2|=2a$,所以$|AM|+|AF_2|=|AF_1|-|AF_2|=2a$. 因为直线$y=k\left(x+\dfrac{a}{2}\right)$与$x$轴交于点$M$,所以$M\left(-\dfrac{a}{2},0\right)$,易知$|AM|+|AF_2|\geqslant|MF_2|=\dfrac{a}{2}+c$,当且仅当$M,A,F_2$三点共线时取等号. 所以$2a\geqslant\dfrac{a}{2}+c$,得$\dfrac{3a}{2}\geqslant c$,得$\dfrac{3}{2}\geqslant\dfrac{c}{a}$,所以离心率$e=\dfrac{c}{a}\leqslant\dfrac{3}{2}$,又$e>1$,所以$\Gamma$的离心率的取值范围为$\left(1,\dfrac{3}{2}\right]$.

四、解答题:共70分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. 命题意图　本题考查利用导数研究三次函数的性质.

解析　(Ⅰ)$f'(x)=9x^2+a$, ……(1分)

因为$f(x)$在$x=1$处取得极值-1,

所以$\begin{cases}f'(1)=9\times1^2+a=0,\\ f(1)=3\times1^3+a\times1+b=-1,\end{cases}$ ……(3分)

解得$\begin{cases}a=-9,\\ b=5.\end{cases}$ ……(5分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知$f(x)=3x^3-9x+5$,$f'(x)=9x^2-9=9(x+1)(x-1)$, ……(6分)

令$f'(x)=0$,解得$x=-1$或$x=1$. ……………………………………………………………… (7分)

当x变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表所示:

x	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,2)$	2
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	-1	单调递增	极大值11	单调递减	极小值-1	单调递增	11

……… (9分)

所以$f(x)$在区间$[-2,2]$上的最大值为11,最小值为-1. ……………………………………… (10分)

18. **命题意图** 本题考查数列的递推关系,数列的综合问题.

解析 (Ⅰ)因为$a_{n+1}=3a_n-2$,所以$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$. ……………………………… (2分)

联立$\begin{cases}a_2-a_1=6,\\a_2=3a_1-2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=4,\\a_2=10,\end{cases}$ ………………………………………………… (4分)

所以数列$\{a_n-1\}$是以$a_1-1=3$为首项,3为公比的等比数列. …………………………… (5分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)得$a_n-1=3\times3^{n-1}=3^n$,所以$a_n=3^n+1$. ………………………………… (7分)

所以$b_n=\sqrt{\log_3(a_n-1)}=\sqrt{n}$. ……………………………………………………………… (8分)

由$b_{m+21}=b_m+b_{m+5}$得$\sqrt{m}+\sqrt{m+5}=\sqrt{m+21}$, ……………………………………… (9分)

整理得$3m^2+52m-256=(3m+64)(m-4)=0$, …………………………………………………… (11分)

解得$m=4$或$m=-\frac{64}{3}$(舍去),

故$m=4$. …………………………………………………………………………………………… (12分)

19. **命题意图** 本题考查空间几何体的结构特征,以及空间向量的应用.

解析 (Ⅰ)在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中,$AA_1\perp BC$,$AC\perp BC$,$AA_1\cap AC=A$,

所以$BC\perp$平面ACC_1A_1, ………………………………………………………………………… (2分)

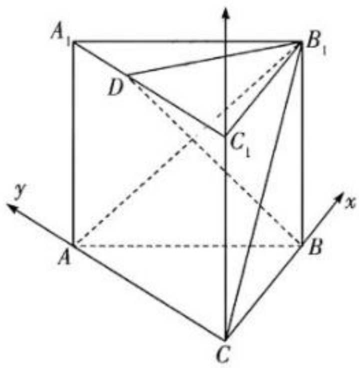
所以$\angle BAC$是AB与平面ACC_1A_1所成的角,即$\angle BAC=30°$. ……………………………… (3分)

因为ABB_1A_1是面积为4的正方形,

所以$AB=2$,则$BC=\frac{1}{2}AB=1$,$AC=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$, …………………………………… (4分)

所以三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积为$\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\times2=\sqrt{3}$. ……………………………… (5分)

(Ⅱ)以C为坐标原点,CB,CA,CC_1所在的直线分别为x,y,z轴建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $C(0,0,0)$，$A(0,\sqrt{3},0)$，$B(1,0,0)$，$B_1(1,0,2)$，$D\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3},2\right)$，

$\overrightarrow{CA}=(0,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{CB_1}=(1,0,2)$，$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{BD}=\left(-1,\frac{2\sqrt{3}}{3},2\right)$. ………………………… (6分)

设平面 AB_1C 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA}=(x,y,z)\cdot(0,\sqrt{3},0)=\sqrt{3}y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}=(x,y,z)\cdot(1,0,2)=x+2z=0,\end{cases}\text{得}\begin{cases}y=0,\\ x=-2z,\end{cases}$$

取 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(-2,0,1)$； ………………………… (8分)

设平面 BB_1D 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x',y',z')$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BB_1}=(x',y',z')\cdot(0,0,2)=2z'=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=(x',y',z')\cdot\left(-1,\frac{2\sqrt{3}}{3},2\right)=-x'+\frac{2\sqrt{3}}{3}y'+2z'=0,\end{cases}\text{得}\begin{cases}z'=0,\\ x'=\frac{2\sqrt{3}}{3}y',\end{cases}$$

取 $y'=3$，得 $\boldsymbol{m}=(2\sqrt{3},3,0)$. ………………………… (10分)

设平面 AB_1C 与平面 BB_1D 夹角的大小为 θ，则

$\cos\theta=\left|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{(2\sqrt{3},3,0)\cdot(-2,0,1)}{\sqrt{21}\times\sqrt{5}}\right|=\frac{4\sqrt{35}}{35}$. ………………………… (12分)

20. **命题意图** 本题考查椭圆的方程与性质.

解析 （Ⅰ）设椭圆 C 的半焦距为 $c(c>0)$.

因为直线 AF_1，AF_2 的斜率之积为 $-\frac{1}{4}$，

所以 $\frac{0-c}{2-0}\cdot\frac{0-(-c)}{2-0}=-\frac{1}{4}$，解得 $c=1$. ………………………… (1分)

因为 $|BF_1|+|BF_2|=2\sqrt{2}$，

所以 $2a=2\sqrt{2}$，解得 $a=\sqrt{2}$， ………………………… (2分)

则 $b=\sqrt{a^2-c^2}=1$. ………………………… (3分)

所以 C 的方程为 $\frac{y^2}{2}+x^2=1$. ………………………… (4分)

（Ⅱ）由已知得过点 $A(2,0)$ 且满足题意的直线 l 的斜率存在，设 $l:y=k(x-2)$，

联立 $\begin{cases}\frac{y^2}{2}+x^2=1,\\ y=k(x-2),\end{cases}$ 消去 y 得 $(k^2+2)x^2-4k^2x+4k^2-2=0$， ………………………… (5分)

令 $\Delta=(-4k^2)^2-4(k^2+2)(4k^2-2)>0$，

解得 $-\frac{\sqrt{6}}{3}<k<\frac{\sqrt{6}}{3}$.

设 $D(x_1,y_1)$，$E(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{4k^2}{k^2+2}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-2}{k^2+2}$， ………………………… (6分)

因为以 DE 为直径的圆经过点 O，所以 $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OE}=0$，即 $x_1x_2+y_1y_2=0$， ………………………… (7分)

所以 $x_1x_2+k^2(x_1-2)(x_2-2)=0$，

即 $(k^2+1)x_1x_2-2k^2(x_1+x_2)+4k^2=0$，

所以$(k^2+1)\cdot\frac{4k^2-2}{k^2+2}-2k^2\cdot\frac{4k^2}{k^2+2}+4k^2=0$, ……………………………… (8 分)

整理可得 $10k^2-2=0$,

解得 $k=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$,满足 $-\frac{\sqrt{6}}{3}<k<\frac{\sqrt{6}}{3}$, ……………………………… (11 分)

所以直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}(x-2)$. ……………………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题考查随机变量的分布列与期望,条件概率的计算.

解析 (Ⅰ)由题意得,$\begin{cases}16+x+2+2+0=30,\\8+8+y+4+2=30,\\z+6+8+8+4=30,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=10,\\y=8,\\z=4.\end{cases}$ ……………………………… (3 分)

(Ⅱ)由题意可知,词汇量位于区间[3 500,4 500]的高三学生有 12 人,位于区间[3 500,4 000)的高三学生有 8 人,则 X 的所有可能取值为 0,1,2, ……………………………… (4 分)

$P(X=0)=\frac{C_4^2}{C_{12}^2}=\frac{1}{11}$,$P(X=1)=\frac{C_8^1C_4^1}{C_{12}^2}=\frac{16}{33}$,$P(X=2)=\frac{C_8^2}{C_{12}^2}=\frac{14}{33}$, ……………………………… (6 分)

所以随机变量 X 的概率分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{11}$	$\frac{16}{33}$	$\frac{14}{33}$

……………………………… (7 分)

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{11}+1\times\frac{16}{33}+2\times\frac{14}{33}=\frac{4}{3}$. ……………………………… (8 分)

(Ⅲ)由题知,词汇量位于区间[4 000,4 500]的概率为$\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$, ……………………………… (9 分)

从该学校任选一位学生,外语选修日语且词汇量位于区间[4 000,4 500]的概率为 $10\%\times20\%=0.02=\frac{1}{50}$,

……………………………… (10 分)

根据条件概率的公式,在已知此学生词汇量位于区间[4 000,4 500]的条件下,他外语选修的是日语的概率为

$\frac{\frac{1}{50}}{\frac{1}{15}}=\frac{3}{10}$. ……………………………… (12 分)

22. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数的性质.

解析 (Ⅰ)由条件知 $f'(x)=a\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}=\frac{x-a}{x^2}$,$x>0$, ……………………………… (1 分)

当 $a\leqslant0$ 时,$f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………… (2 分)

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)<0$,得 $x<a$,令 $f'(x)>0$,得 $x>a$,

所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减,在 $(a,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………… (4 分)

(Ⅱ)解法一:由方程 $f(x)=ax^2+\frac{a}{x}$ 得 $\ln x-ax^2-2=0$,"方程 $f(x)=ax^2+\frac{a}{x}$ 有两个不同的实数根"等价于"函数 $g(x)=\ln x-ax^2-2$ 有两个零点". ……………………………… (5 分)

$g'(x)=\frac{1}{x}-2ax=\frac{1-2ax^2}{x},x>0.$

①当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，最多只有一个零点，不符合题意； ……………（6 分）

②当 $a>0$ 时，由 $g'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{\sqrt{2a}}$，

当 $0<x<\frac{1}{\sqrt{2a}}$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$ 上单调递增，当 $x>\frac{1}{\sqrt{2a}}$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{\sqrt{2a}},+\infty\right)$ 上单调递减. ……………（7 分）

（ⅰ）若 $a\geqslant\frac{1}{2e^5}$，则 $g(x)\leqslant g\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)=\ln\frac{1}{\sqrt{2a}}-\frac{5}{2}\leqslant 0$，最多只有一个零点； ……………（8 分）

（ⅱ）若 $a<\frac{1}{2e^5}$，因为 $\frac{1}{\sqrt{2a}}>e^{\frac{5}{2}}>1$，且 $g\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)>0$，$g(1)=-a-2<0$，

所以 $g(x)$ 在区间 $\left(1,\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$ 内有一个零点. ……………（9 分）

令函数 $h(x)=\ln x-x+1$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-1,x>0.$

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数；

当 $x>1$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是减函数.

所以 $h(x)\leqslant h(1)=0$，故 $\ln x\leqslant x-1$. ……………（10 分）

所以 $g\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-\frac{1}{a}-2<\frac{1}{a}-1-\frac{1}{a}-2=-3<0$，又 $\frac{1}{a}>\frac{1}{\sqrt{2a}}$，

所以 $g(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{\sqrt{2a}},\frac{1}{a}\right)$ 内有一个零点. ……………（11 分）

综上可知：当 $0<a<\frac{1}{2e^5}$ 时，$g(x)$ 有两个零点，即方程 $f(x)=ax^2+\frac{a}{x}$ 有两个不同的实数根，

故 a 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{2e^5}\right)$. ……………（12 分）

解法二：由方程 $f(x)=ax^2+\frac{a}{x}$ 得 $a=\frac{\ln x-2}{x^2}$.

设函数 $g(x)=\frac{\ln x-2}{x^2}$，则 $g'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-2x(\ln x-2)}{x^4}=\frac{5-2\ln x}{x^3},x>0.$ ……………（6 分）

令 $g'(x)=0$，得 $x=e^{\frac{5}{2}}$，设 $x_0=e^{\frac{5}{2}}$，

则当 $0<x<x_0$ 时，$g'(x)>0$，当 $x>x_0$ 时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减， ……………（8 分）

所以 $g(x)$ 的极大值也就是最大值为 $g(x_0)=\frac{1}{2e^5}$，

且当 $x>0$，$x\to 0$ 时，$g(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)>0$，且 $g(x)\to 0$. ……………（10 分）

方程 $f(x)=ax^2+\frac{a}{x}$ 有两个不同的实数根，转化为直线 $y=a$ 与 $y=g(x)$ 的图象有两个交点，

结合函数图象可知 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{2e^5}\right)$. ……………（12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。