巴中市普通高中2021级“零诊”考试
数学（文科）参考答案

一、选择题（每题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	D	A	B	A	C	B	C	B	C	D

二、填空题（每题5分，共20分）

13. $x-y-2=0$；　　14. $\frac{25}{4}$；　　15. 2^n-1；　　16. ①③.

三、解答题（17—21每题12分，22—23每题10分）

17.（12分）

解：（1）列联表如下表：　　　　2分

	比较关注	不太关注	合计
男性	240	160	400
女性	150	50	200
合计	390	210	600

则 $k=\frac{600(240\times50-160\times150)^2}{390\times210\times400\times200}=\frac{1200}{91}\approx13.2>6.635$　　　　5分

所以能在犯错误的概率不超过0.01的前提下认为性别与对新能源汽车的关注有关　　　　6分

（2）由题意知，年龄在[20, 30)内的50人中男性与女性的比为4∶1　　　　7分

所抽男性人数为 $5\times\frac{4}{5}=4$ 人，所抽女性人数为 $5\times\frac{1}{5}=1$ 人　　　　8分

记“选出的2人中恰有一个女性”为事件A

设4位男性分别为 B_1，B_2，B_3，B_4，一个女性为 D

则所有结果为：

B_1B_2，B_1B_3，B_1B_4，B_2B_3，B_2B_4，B_3B_4，B_1D，B_2D，B_3D，B_4D，共10种　　　　10分

事件A包含的基本事件为 B_1D，B_2D，B_3D，B_4D，共4种　　　　11分

由古典概型的概率公式得：$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$　　　　12分

18.（12分）

解：（1）由 $4a=3b$ 及正弦定理得：$4\sin A=3\sin B$　　　　1分

由 $B=2A$ 得：$\sin B=\sin2A=2\sin A\cos A$　　　　2分

$4\sin A=6\sin A\cos A$　　　　3分

由 $0<A<\pi$ 得 $\sin A\neq0$　　　　4分

$\cos A=\frac{2}{3}$　　　　5分

$\cos B=\cos2A=2\cos^2A-1=-\frac{1}{9}$　　　　6分

（2）**方法一**

当 $a=9$ 时，代入 $4a=3b$ 得：$b=12$　　　　7分

由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ 得：$144=81+c^2+2c$　　　　8分

整理得：$c^2+2c-63=0$，解得：$c=7$　　　　9分

由（1）可知：$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt5}{3}$　　　　10分

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times7\times12\times\frac{\sqrt5}{3}=14\sqrt5$　　　　12分

方法二

当 $a=9$ 时，代入 $4a=3b$ 得：$b=12$　　　　7分

由（1）可知：$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt5}{3}$　　　　8分

$\sin B=\sin 2A=2\cdot\frac{\sqrt5}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4\sqrt5}{9}$ ……9分

由 $A+B+C=\pi$ 得 $C=\pi-(A+B)$ ……10分

$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt5}{3}\cdot(-\frac{1}{9})+\frac{2}{3}\cdot\frac{4\sqrt5}{9}=\frac{7\sqrt5}{27}$ ……11分

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot9\cdot12\cdot\frac{7\sqrt5}{27}=14\sqrt5$ ……12分

方法三

将 $a=9$ 代入 $4a=3b$ 得：$b=12$ ……7分

由（1）得：$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt5}{3}$ ……8分

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得：$81=144+c^2-16c$

整理得：$c^2-16c+63=0$，解得：$c=9$ 或 $c=7$ ……9分

若 $c=9$，则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，此时 $A=C$

由 $B=2A$ 及内角和定理得：$A=\frac{\pi}{4}$，与 $\cos A=\frac{2}{3}$ 矛盾，不合题意 ……10分

$\therefore c=7$ ……11分

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot7\cdot12\cdot\frac{\sqrt5}{3}=14\sqrt5$ ……12分

19．（12分）

解：（1）证明：

方法一（综合法一，平面与平面平行的判定）

取 PD 的中点 M，连结 ME、MF，如右图

由 E、F 分别为 CD、PA 的中点及中位线定理得

$ME // BC$，$MF // PB$ ……2分

$\because BC$、$PB\subset$ 平面 PBC，FM、$EM\not\subset$ 平面 PBC

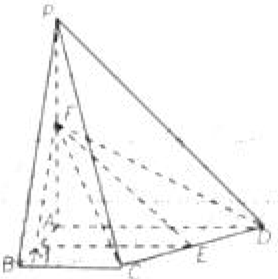
$\therefore ME //$ 平面 PBC，$MF //$ 平面 PBC ……3分

又 $ME\cap MF=M$，ME、$MF\subset$ 平面 EFM

$\therefore$ 平面 $EFM //$ 平面 PBC ……5分

$\because EF\subset$ 平面 EFM

$\therefore EF //$ 平面 PBC ……6分



方法二（综合法二，平面与平面平行的判定）

取 PD 的中点 Q，连结 QE、QF，如右图

由 E、F 分别为 CD、PA 的中点及中位线定理得

$QF // AD$，$QE // PC$ ……1分

$\because PC\subset$ 平面 PBC，$QE\not\subset$ 平面 PBC

$\therefore QE //$ 平面 PBC ……2分

$\because AD // BC$，$QF // AD$

$\therefore QF // BC$ ……3分

$\because BC\subset$ 平面 PBC，$QF\not\subset$ 平面 PBC

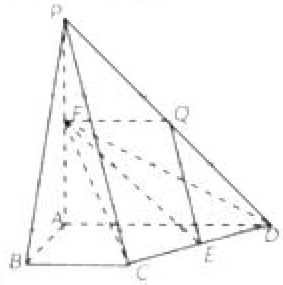
$\therefore QF //$ 平面 PBC ……4分

又 $QE\cap QF=Q$，QE、$QF\subset$ 平面 EFQ

$\therefore$ 平面 $EFQ //$ 平面 PBC ……5分

$\because EF\subset$ 平面 EFQ

$\therefore EF //$ 平面 PBC ……6分



方法三：（综合法一，直线与平面平行的判定）

延长 AE 交 BC 的延长线于 N，连结 PN

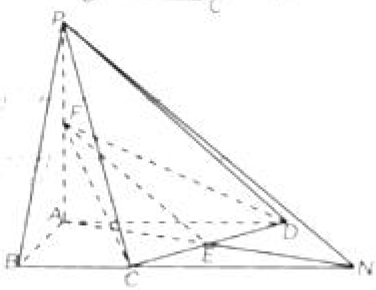
$\because AD // BC$，$CE=ED$

$\therefore AE=EN$ ……2分

又 $AF=FP$

$\therefore EF // PN$ ……4分

$\because PN\subset$ 平面 PBC，$EF\not\subset$ 平面 PBC



$EF//$ 平面 PBC ……6 分

(2) **方法一**

$PA \perp$ 底面 $ABCD$

$PA \perp AD$，$PA \perp AB$ ……7 分

又 $AB \perp AD$，$PA \cap AD = A$，$PA, AD \subset$ 平面 PAD

$AB \perp$ 平面 PAD

∴ B 到平面 PAD 的距离为 $AB = 2$ ……8 分

$AD // BC$，$AD \subset$ 平面 PAD

$BC //$ 平面 PAD

B、C 到平面 PAD 的距离相等，即点 C 到 PDF 的距离为 2 ……9 分

又 $S_{\triangle PDF} = \frac{1}{2} \cdot PF \cdot AD = 4$ ……10 分

∴ $V_{P-CDF} = V_{C-PDF} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle PDF} \cdot 2 = \frac{8}{3}$ ……12 分

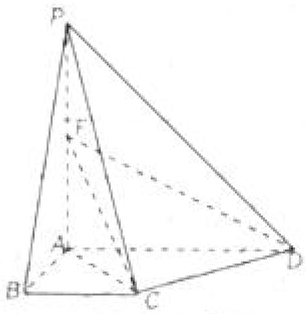
方法二

由 F 为 PA 的中点知 $V_{P-CDF} = V_{C-PDF} = \frac{1}{2} V_{C-PAD}$ ……8 分

由 $PA \perp$ 底面 $ABCD$ 且 $AD // BC$，$AB \perp AD$，$PA = AD = 4$，$AB = BC = 2$ 得

$V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (AD + BC) \cdot AB \cdot PA = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4 = 8$ ……9 分

$V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AB \cdot PA = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = \frac{8}{3}$ ……10 分



$V_{P-ACD} = V_{P-ABCD} - V_{P-ABC} = \frac{16}{3}$ ……11 分

$V_{P-CDF} = \frac{1}{2} V_{P-ACD} = \frac{8}{3}$ ……12 分

方法三

连结 AC，由 $AB \perp AD$，$AD // BC$ 得 $AB \perp BC$

$AB = BC = 2$

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2\sqrt{2}$，$\angle CAB = \angle CAD = 45°$ ……7 分

在 $\triangle ACD$ 中，$AD = 4$，由余弦定理得 $CD = \sqrt{AC^2 + AD^2 - 2AD \cdot AC \cdot \cos 45°} = 2\sqrt{2}$

$AC \perp CD$ ……8 分

$PA \perp$ 底面 $ABCD$，$PA \subset$ 平面 PAC

平面 $PAC \perp$ 平面 $ABCD$，$PA \perp AC$ ……9 分

平面 $PAC \cap$ 平面 $ABCD = AC$，$CD \subset$ 平面 $ABCD$

$CD \perp$ 平面 PAC ……10 分

$V_{P-CDF} = V_{D-CFP} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle CFP} \cdot CD = \frac{1}{6} \cdot PF \cdot AC \cdot CD = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{8}{3}$ ……12 分

方法四

取 AD 的中点 G，连结 CG

由 $AD // BC$，$AD = 4$，$BC = 2$ 得 $AG // BC$，$AG = BC$ ……7 分

又 $AD \perp AB$，$AB = 2$

∴ 四边形 $ABCG$ 是正方形

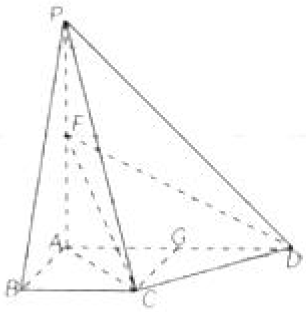
$CG \perp AD$，$CG = 2$ ……8 分

$PA \perp$ 底面 $ABCD$，$AD, CG \subset$ 平面 PAD

$PA \perp CG$，$PA \perp AD$ ……9 分

$CG \perp$ 平面 PAD

∴ 点 C 到 PFD 的距离为 $CG = 2$ ……10 分



$V_{P-CDF} = V_{C-FDP} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle DFP} \cdot CG$

$= \frac{1}{6} \cdot AD \cdot FP \cdot CG = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = \frac{8}{3}$ ……12 分

20. （12 分）

解：(1) $f'(x)=1+\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{3}{x+1}=\frac{x(x-1)}{(x+1)^2}$ $(x>-1)$ ……………………2分

令 $f'(x)>0$ 得 $-1<x<0$ 或 $x>1$，令 $f'(x)<0$ 得 $0<x<1$ ……………………4分

∴ $f(x)$ 的增区间为 $(-1,0)$，$(1,+\infty)$，减区间为 $(0,1)$ ……………………5分

(2) **方法一**

由已知得 $g(x)=x+1-(1+a)\ln(x+1)$，故 $g'(x)=1-\frac{1+a}{x+1}=\frac{x-a}{x+1}$ $(x>-1)$

1°当 $a\le -1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，不存在两个零点 ……………………7分

2°当 $a>-1$ 时，令 $g'(x)>0$ 得 $x>a$，令 $g'(x)<0$ 得 $-1<x<a$

故 $g(x)$ 在 $(-1,a)$ 上为减函数，在 $(a,+\infty)$ 上为增函数 ……………………8分

$g(x)_{min}=g(a)=a+1-(1+a)\ln(a+1)$ ……………………9分

由 $g(x)$ 有两个零点得：即 $a+1-(1+a)\ln(a+1)<0$

又 $a>-1$，故 $\ln(a+1)>1$，解得 $a>e-1$ ……………………10分

又 $g(0)=1>0$，且当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$

∴当 $a>e-1$ 时，函数 $g(x)$ 有两个零点 ……………………11分

综上可知：a 的取值范围为 $(e-1,+\infty)$ ……………………12分

方法二

$g(x)=x+1-(1+a)\ln(x+1)$ 有两个零点等价于：

关于 x 的方程 $x+1-(1+a)\ln(x+1)=0$ $(x>-1)$ 有两个实根

即 $x+1=(1+a)\ln(x+1)$ $(x>-1)$(*)有两个实根 ……………………6分

由(1)知 $a\neq-1$，由方程(*)得 $\frac{1}{a+1}=\frac{\ln(x+1)}{x+1}$ $(x>-1)$ 有两个实根 ……………………7分

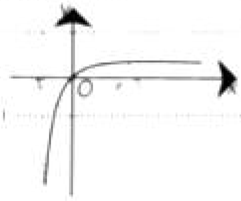
令 $h(x)=\frac{\ln(x+1)}{x+1}$，则 $h'(x)=\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ $(x>-1)$

由 $h'(x)>0$ 得 $\ln(x+1)<1$，解得 $-1<x<e-1$

由 $h'(x)<0$ 得 $\ln(x+1)>1$ 解得 $x>e-1$ ……………………8分

∴ $h(x)$ 在 $(-1,e-1)$ 上为增函数，在 $(e-1,+\infty)$ 上为减函数 ……………………9分

∴ $h(x)_{max}=h(e-1)=\frac{1}{e}$ ……………………10分



又当 $-1<x<0$ 时，$h(x)<0$

当 $x>0$ 时 $h(x)>0$ 且当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to0$（如右图）……………………11分

∴当 $0<\frac{1}{a+1}<\frac{1}{e}$，即 $a>e-1$ 时，$g(x)$ 有两个零点

∴ a 的取值范围为 $(e-1,+\infty)$ ……………………12分

21.（12分）

解：(1) 由题意知 $A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，又 $M(1,\frac{3}{2})$，则

$\overrightarrow{MA_1}=(-a-1,-\frac{3}{2})$，$\overrightarrow{MA_2}=(a-1,-\frac{3}{2})$

∴ $(-a-1)(a-1)+(-\frac{3}{2})^2=-\frac{3}{4}$，解得 $a=2$ ……………………2分

由 $M(1,\frac{3}{2})$ 在椭圆 C 上及 $a=2$ 得 $\frac{1}{4}+\frac{9}{4b^2}=1$，解得 $b^2=3$ ……………………3分

∴椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ ……………………4分

(2) 由(1)知，右焦点为 $F(1,0)$

据题意设直线 l 的方程为 $x=my+1$ $(m\neq0)$，$P(my_1+1,y_1)$，$Q(my_2+1,y_2)$

则 $k_1=\frac{y_1-\frac{3}{2}}{my_1}=\frac{2y_1-3}{2my_1}$，$k_2=\frac{y_2-\frac{3}{2}}{my_2}=\frac{2y_2-3}{2my_2}$ ……5分

于是由 $k_1+k_2=0$ 得 $\frac{2y_1-3}{2my_1}+\frac{2y_2-3}{2my_2}=0$，化简得 $4y_1y_2=3(y_1+y_2)$ (*) ……6分

联立 $\begin{cases}x=my+1\\3x^2+4y^2-12=0\end{cases}$ 消去 x 整理得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$

$\Delta=(6m)^2+36(3m^2+4)=144(m^2+1)>0$

由根与系数的关系得：$y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$ ……7分

代入(*)式得：$\frac{-18m}{3m^2+4}=-\frac{36}{3m^2+4}$，解得 $m=2$ ……8分

所以直线 l 的方程为 $x-2y-1=0$ ……9分

(2)方法一

由(1)可知：$\Delta=144(2^2+1)=720$，$y_1+y_2=-\frac{3}{4}$，$y_1y_2=-\frac{9}{16}$

由弦长公式得：$|PQ|=\sqrt{1+2^2}|y_1-y_2|=\frac{\sqrt{5}\sqrt{720}}{16}=\frac{15}{4}$ ……10分

设点 M 到直线 l 的距离为 d，则 $d=\frac{|1-2\times\frac{3}{2}-1|}{\sqrt{1+(-2)^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ……11分

$S_{\triangle MPQ}=\frac{1}{2}|PQ|d=\frac{1}{2}\times\frac{15}{4}\times\frac{3\sqrt{5}}{5}=\frac{9\sqrt{5}}{8}$ ……12分

方法二

由题意可知 $S_{\triangle MPQ}=S_{\triangle MPF}+S_{\triangle MQF}=\frac{1}{2}|MF|(|x_P|+|x_Q|)=\frac{3}{4}(|x_P|+|x_Q|)$ ……10分

由(1)知，直线 l 的方程为 $x-2y-1=0$

代入 $3x^2+4y^2-12=0$ 消去 y 得 $4x^2-2x-11=0$

$\Delta=2^2-4\times4\times(-11)=180>0$，$x_P+x_Q=\frac{1}{2}$，$x_Px_Q=-\frac{11}{4}<0$ ……11分

$S_{\triangle MPQ}=\frac{3}{4}(|x_P|+|x_Q|)=\frac{3}{4}|x_P-x_Q|=\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{180}}{4}=\frac{9\sqrt{5}}{8}$ ……12分

22.（10分）

解：(1)方法一

由已知，圆 C 的标准方程为：$(x-2)^2+(y-2)^2=4$ ……2分

化为一般式得：$x^2+y^2-4x-4y+4=0$ ……3分

将 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 代入圆的一般方程得：

圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+4=0$ ……5分

方法二

点 C 的极坐标为 $(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$ ……1分

在圆 C 上任取点 P 的极坐标为 (ρ,θ)，当 C、O、P 不共线时，由余弦定理得：

$\rho^2+(2\sqrt{2})^2-2\times2\sqrt{2}\rho\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)=2^2$

化简得：$\rho^2-4\sqrt{2}\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{4})+4=0$ ……4分

当 C、O、P 共线时，点 $P(2\sqrt{2}\pm2,\frac{\pi}{4})$ 的坐标也适合上面的方程 ……4分

即圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2-4\sqrt{2}\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{4})+4=0$ ……5分

（2）方法一

由已知，直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\alpha$ $(\rho\in R)$，则：

$\begin{cases}\theta=\alpha,\\ \rho^2-4\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+4=0\end{cases}$ 整理得 $\rho^2-4\rho\cos\alpha-4\rho\sin\alpha+4=0$

由 $\Delta>0$ 得 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ……6分

设 $M(\rho_1,\alpha)$，$N(\rho_2,\alpha)$，则 $\rho_1+\rho_2=4\sin\alpha+4\cos\alpha$，$\rho_1\rho_2=4$ ……7分

则 $|OM|^2+|ON|^2=\rho_1^2+\rho_2^2=(\rho_1+\rho_2)^2-2\rho_1\rho_2=16$

∴ $16(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-8=16$，化简得：$\sin 2\alpha=\frac{1}{2}$ ……8分

由 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 知 $0<2\alpha<\pi$ 得：$2\alpha=\frac{\pi}{6}$，或 $2\alpha=\frac{5\pi}{6}$ ……9分

∴ $\alpha=\frac{\pi}{12}$，或 $\frac{5\pi}{12}$ ……10分

方法二

将 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ 代入 $x^2+y^2-4x-4y+4=0$ 得：$t^2-4t\cos\alpha-4t\sin\alpha+4=0$

由 $\Delta>0$ 得 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ……6分

设 M，N 对应的参数分别为 t_1，t_2，则 $t_1+t_2=4\cos\alpha+4\sin\alpha$，$t_1t_2=4$ ……7分

∴ $|OM|^2+|ON|^2=t_1^2+t_2^2=(t_1+t_2)^2-2t_1t_2=16$

∴ $16(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-8=16$，化简得：$\sin 2\alpha=\frac{1}{2}$ ……8分

由 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 知 $0<2\alpha<\pi$ 得：$2\alpha=\frac{\pi}{6}$，或 $2\alpha=\frac{5\pi}{6}$ ……9分

∴ $\alpha=\frac{\pi}{12}$，或 $\frac{5\pi}{12}$ ……10分

23.（10分）

解（1）方法一

当 $a=2$ 时，$f(x)=2|x+2|-2|x|$

① $\begin{cases}x\le -2,\\ -2(x+2)+2x>2\end{cases}$ 无解 ……1分

② $\begin{cases}-2<x\le 0,\\ 2(x+2)+2x>2\end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{2}<x\le 0$ ……2分

③ $\begin{cases}x>0,\\ 2(x+2)-2x>2\end{cases}$ 解得 $x>0$ ……4分

综上：原不等式的解集为 $(-\frac{1}{2},+\infty)$ ……5分

方法二

原不等式等价于：$|x+2|-|x|>1$ ……1分

由绝对值的几何意义知 $|x+2|-|x|>1$ 的几何意义为：

数轴上点 x 对应的点到 -2 点对应的距离与其到原点的距离之差大于1 ……2分

又 $|x+2|-|x|=1$ 的解为 $x=-\frac{1}{2}$ ……4分

∴ 原不等式的解集为 $(-\frac{1}{2},+\infty)$ ……5分

（2）当 $x\in(-1,1)$ 时，$f(x)=2x+4-|ax|$

原不等式等价于：$2x+4-|ax|>x+1$ ……6分

即$|ax|<x+3$，则$-(x+3)<ax<x+3$ ……7分

$\therefore\ \begin{cases}(a+1)x+3>0,\\(a-1)x-3<0.\end{cases}$ 故$\begin{cases}-(a+1)+3>0,\\(a+1)+3>0,\\-(a-1)-3<0,\\(a-1)-3<0.\end{cases}$ 解得$-2<a<2$ ……9分

$\therefore$ a的取值范围为$(-2,\ 2)$． ……10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。