2021年秋季高三数学（理）开学摸底考试卷03

班级____________ 姓名____________ 分数____________

（考试时间：120分钟 试卷满分：150分）

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{x\in N\mid 1\leqslant x\leqslant 9\}$，$B=\{x\mid 0<x<5\}$，则 $A\bigcap B=$

A．$\{2，3，4\}$　　B．$\{1，2，3，4\}$　　C．$\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 5\}$　　D．$\{x\mid 1\leqslant x<5\}$

【答案】B

【解析】$\because$ 集合 $A=\{x\in N\mid 1\leqslant x\leqslant 9\}=\{1，2，3，4，5，6，7，8，9\}$，

$B=\{x\mid 0<x<5\}$，

$\therefore A\bigcap B=\{1，2，3，4\}$．

故选B．

2．设复数 z 满足 $\dfrac{1+z}{1-z}=i$，则 $\overline{z}=$

A．i　　B．$-i$　　C．1　　D．$1+i$

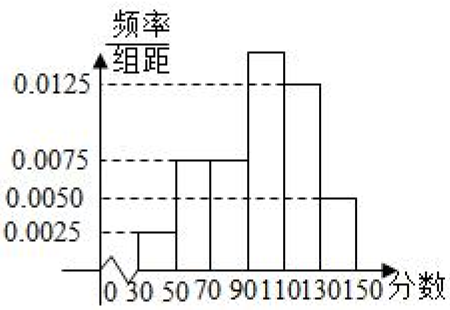
【答案】B

【解析】因为 $\dfrac{1+z}{1-z}=i$，所以 $z=\dfrac{-1+i}{1+i}=\dfrac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2i}{2}=i$，

故 $\overline{z}=-i$．

故选B．

3．2021年4月23日是第26个世界读书日，某市举行以“颂读百年路，展阅新征程”为主题的读书大赛活动，以庆祝中国共产党成立100周年．比赛分初赛和复赛两个阶段进行，规定：初赛成绩大于90分的具有复赛资格，某校有1000名学生参加了初赛，所有学生的成绩均在区间$(30，150]$内，其频率分布直方图如图所示，则该校获得复赛资格的人数为



A．650　　　　B．660　　　　C．680　　　　D．700

【答案】A

【解析】由频率分布直方图可得，学生初赛成绩在 $(30$，$90]$ 分的频率为 $(0.0025+0.0075+0.0075)\times 20=0.35$，

所以学生初赛成绩大于 90 分的频率为 $1-0.35=0.65$，

则该校获得复赛资格的人数为 $0.65\times 1000=650$．

故选 A．

4．某新晋网红一线城市鹅城人口模型近似为 $P=250024e^{0.012t}$，其中 $t=0$ 表示 2020 年的人口数量，则鹅城人口数量达到 320000 的年份大约是　　$)(ln2\approx 0.693$，$ln3\approx 1.099$，$ln5\approx 1.609)$

A．2040 年　　　　B．2045 年　　　　C．2030 年　　　　D．2050 年

【答案】A

【解析】令 $250024e^{0.012t}=320000$，

则 $e^{0.012t}=\dfrac{320000}{250024}$，两边取对数得 $0.012t=ln\dfrac{320000}{250024}$，

即 $t=\dfrac{ln\dfrac{320000}{250024}}{0.012}\approx\dfrac{5ln2-2ln5}{0.012}\approx 20.583$，

过去 20 年或 21 年，$t=0$ 表示 2020 年的人口数量，

则鹅城人口数量达到 320000 的年份大约是 2040 年或 2041 年．

故选 A．

5．已知直线 $l:kx+y-\sqrt{2}k=0$ 与双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的一条渐近线平行，且这两条平行线间的距离为 $\dfrac{4}{3}$，则双曲线 C 的焦距为

A．4　　　　B．6　　　　C．$2\sqrt{3}$　　　　D．8

【答案】B

【解析】直线 l 与双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的一条渐近线平行，

不妨设直线 l 与渐近线 $bx-y=0$ 平行，

由 $kx+y-\sqrt{2}k=0$ 可知，l 过点 $(\sqrt{2},0)$，

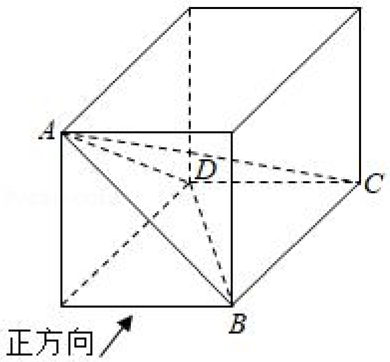
$\because$ 两条平行线间的距离为 $\dfrac{4}{3}$，

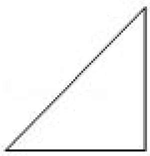
$\therefore \dfrac{|0-\sqrt{2}b|}{\sqrt{1+b^2}}=\dfrac{4}{3}$，解得 $b^2=8$，

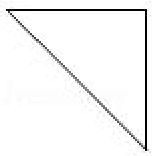
$\therefore c^2=9$，双曲线 C 的焦距为 6．

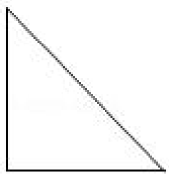
故选 B．

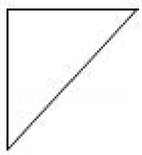
6．三棱锥 $A-BCD$ 的四个顶点为正方体的四个顶点，正方向如图所示，则三棱锥的左视图为



A．

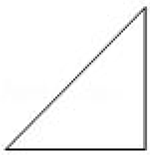
B．

C．

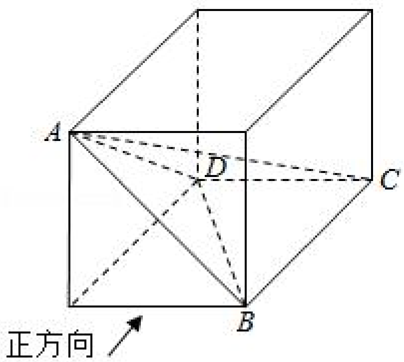
D．

【答案】A

【解析】如图三棱锥 $A-BCD$ 的四个顶点为正方体的四个顶点，

则观察可知其左视图为．

故选 A．



7．$\dfrac{1+\sin 70^\circ}{2-2\sin^2 10^\circ}=$

A．2　　B．-1　　C．1　　D．$\dfrac{1}{2}$

【答案】C

【解析】$\dfrac{1+\sin 70^\circ}{2-2\sin^2 10^\circ}=\dfrac{1+\cos 20^\circ}{2-2sin^2 10^\circ}=\dfrac{1+(1-2sin^2 10^\circ)}{2-2sin^2 10^\circ}=1$．

故选 C．

8．设 $p:2x^2-3x+1\ \ 0$，$q:x^2-(2a+1)x+a(a+1)\ \ 0$，若 $\neg q$ 的必要不充分条件是 $\neg p$，则实数 a 的取值范围是

A．$[0,\dfrac{1}{2}]$　　B．$(0,\dfrac{1}{2}]$

C．$(-\infty,0)\bigcup[\dfrac{1}{2},+\infty)$　　D．$(-\infty,0)\bigcup(\dfrac{1}{2},+\infty)$

【答案】A

【解析】$p:2x^2-3x+1\ \ 0$，解得 $\dfrac{1}{2}\ \ x\ \ 1$，

$q:x^2-(2a+1)x+a(a+1)\ \ 0$，$a\ \ x\ \ a+1$，

$\because \neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件，$\therefore p$ 是 q 的充分不必要条件，

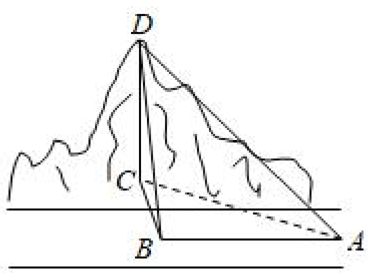
$\therefore \begin{cases} a\ \ \dfrac{1}{2} \\ 1\ \ a+1 \end{cases}$，等号不能同时成立，

解得 $0\ \ a\ \ \dfrac{1}{2}$，

则实数 a 的取值范围 $[0，\dfrac{1}{2}]$．

故选 A．

9．如图，一辆汽车在一条水平的公路上向正西行驶，到 A 处时测得公路北侧一山顶 D 在西偏北 45°（即 $\angle BAC=45^\circ)$ 的方向上，行驶 $600\sqrt{6}m$ 后到达 B 处，测得此山顶在北偏东 15°（即 $\angle ABC=75^\circ)$ 的方向上，仰角 $\angle DBC$ 为 30°，则此山的高度 $CD=$



A．$200\sqrt{3}m$　　B．$400\sqrt{3}m$　　C．$600\sqrt{3}m$　　D．$800\sqrt{3}m$

【答案】B

【解析】ΔABC 中，$\angle BAC=45°$，$AB=600\sqrt{6}$，$\angle ABC=75°$，

$\therefore \angle ACB=60°$，

由正弦定理得 $\dfrac{BC}{\sin 45°}=\dfrac{600\sqrt{6}}{\sin 60°}$，

$$BC=\frac{600\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=1200，$$

RtΔABC 中，$\angle DBC=30°$，

$\therefore CD=BC\tan\angle DBC=1200\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=400\sqrt{3}$，

则山高 CD 为 $400\sqrt{3}m$．

故选 B．

10．把颜色分别为红、黄、蓝、白四种颜色的小球放入颜色分别为红、黄、蓝、白四种颜色的纸盒中，则四个小球都没有放入相同颜色的纸盒中的概率为

A．$\dfrac{16}{81}$　　B．$\dfrac{81}{256}$　　C．$\dfrac{3}{4}$　　D．$\dfrac{2}{3}$

【答案】B

【解析】将四种不同颜色的球放入四种不同颜色的纸盒中基本事件的总数为 $n=4^4=256$，

四个球都没有放入相同颜色的纸盒中的基本事件的总数为 $m=3^4=81$，

所以四个小球都没有放入相同颜色的纸盒中的概率为 $P=\dfrac{81}{256}$．

故选 B．

11．已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，的各顶点都在球 O 的球面上，且 $AB=AC=2$，$BC=2\sqrt{3}$，若球 O 的体积为 $\dfrac{160\sqrt{5}}{3}\pi$，则这个直三棱柱的体积等于

A．$4\sqrt{2}$　　B．$8\sqrt{3}$　　C．8　　D．$4\sqrt{5}$

【答案】B

【解析】设球 O 的半径为 R，$\because$ 球 O 的体积为 $\dfrac{160\sqrt{5}}{3}\pi$，$\therefore \dfrac{4\pi R^3}{3}=\dfrac{160\sqrt{5}}{3}\pi$，解得 $R=2\sqrt{5}$．

$\because AB=AC=2$，$BC=2\sqrt{3}$，

$\therefore \angle BAC=2\times 60^{\circ}=120^{\circ}$． $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times 2^{2}\times \sin 120^{\circ}=\sqrt{3}$．

$\therefore \Delta ABC$ 外接圆的半径 $2r=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 120^{\circ}}=4$，可得 $r=2$．

设球心到底面的距离为 h，则 $h=\sqrt{R^{2}-r^{2}}=4$．

$\therefore$ 这个直三棱柱的体积 $=2h\times\sqrt{3}=8\sqrt{3}$．

故选 B．

12．已知函数 $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数．当 $x>0$ 时，$f(x)=\begin{cases}-lnx, 0<x\leqslant 1\\ 2f(x-1)+\dfrac{1}{2}, x>1\end{cases}$，则函数 $g(x)=f(x)-\sin\dfrac{\pi}{4}x$ 在 $[-\pi$，$\pi]$ 上的零点个数为(　　)

A．3　　　　B．4　　　　C．5　　　　D．6

【答案】C

【解析】解：令 $g(x)=f(x)-\sin\dfrac{\pi}{4}x=0$，即 $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{4}x$，

函数 $f(x)$ 为 R 上的奇函数，则 $f(0)=0$，

函数 $h(x)=\sin\dfrac{\pi}{4}x$ 也是 R 上的奇函数，

故只需研究当 $x>0$ 时的零点个数即可，

又当 $x>0$ 时，$f(x)=\begin{cases}-lnx, 0<x\leqslant 1\\ 2f(x-1)+\dfrac{1}{2}, x>1\end{cases}$，

故在同一坐标系下，作出函数 $y=f(x)$ 与 $y=h(x)$ 的函数图象，如图所示，

由图象可得，当 $x>0$ 时，函数 $y=f(x)$ 与 $y=h(x)$ 的函数图象有 2 个交点，

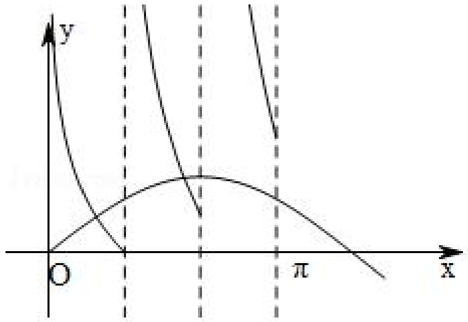
则当 $x<0$ 时，函数 $y=f(x)$ 与 $y=h(x)$ 的函数图象也有 2 个交点，

又 $(0,0)$ 也是它们的交点，

故函数 $y=f(x)$ 与 $y=h(x)$ 的函数图象有 5 个交点，

即函数 $g(x)=f(x)-\sin\dfrac{\pi}{4}x$ 在 $[-\pi$，$\pi]$ 上的零点个数为 5 个．

故选 C．



二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．设函数 $f(x)=x^3+ax^2+(a+2)x$．若 $f(x)$ 的图象关于原点 $(0,0))$ 对称，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,3)$ 处的切线方程为____．

【答案】$5x-y-2=0$

【解析】由题函数 $f(x)=x^3+ax^2+(a+2)x$． $f(x)$ 的图象关于原点 $(0,0))$ 对称，

知 $f(x)$ 为奇函数，可得 $a=0$， $f(x)=x^3+2x$． $\therefore f'(x)=3x^2+2$，

f'（1）$=5=k$．所以切线方程为 $5x-y-2=0$．

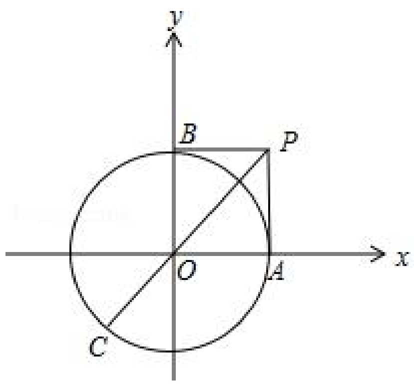
故答案为： $5x-y-2=0$．

14．已知平面向量 $\vec{a}$， $\vec{b}$， $\vec{c}$ 是单位向量，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则 $|\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}|$ 的最大值为____．

【答案】$\sqrt{2}+1$

【解析】由 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

建立如图所示平面直角坐标系，



设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$， $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则 $\vec{a}=(1,0)$， $\vec{b}=(0,1)$，

再设 $\vec{c}=(x,y)$，则 $\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}=(x-1,y-1)$，

$\therefore|\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$，其几何意义为单位圆上的动点与定点 $P(1,1)$ 间的距离．

则其最大值为$|OP|+1=\sqrt{1^2+1^2}+1=\sqrt{2}+1$.

故答案为：$\sqrt{2}+1$.

15．设F_1，F_2分别是椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，过点$F_1$的直线交椭圆$E$于$A$，$B$两点，$|AF_1|=3|BF_1|$，若$\cos\angle AF_2B=\dfrac{3}{5}$，则椭圆$E$的离心率为____.

【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】设$|F_1B|=k(k>0)$，则$|AF_1|=3k$，$|AB|=4k$，

$\therefore|AF_2|=2a-3k$，$|BF_2|=2a-k$.

$\because\cos\angle AF_2B=\dfrac{3}{5}$，

在ΔABF_2中，由余弦定理得，$|AB|^2=|AF_2|^2+|BF_2|^2-2|AF_2|\bullet|BF_2|\cos\angle AF_2B$，

$\therefore(4k)^2=(2a-3k)^2+(2a-k)^2-\dfrac{6}{5}(2a-3k)(2a-k)$，

化简可得$(a+k)(a-3k)=0$，而$a+k>0$，故$a=3k$，

$\therefore|AF_2|=|AF_1|=3k$，$|BF_2|=5k$，

$\therefore|BF_2|^2=|AF_2|^2+|AB|^2$，

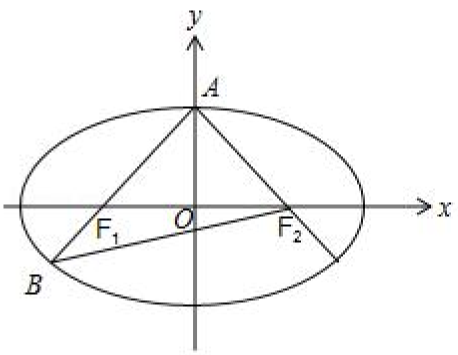
$\therefore AF_1\perp AF_2$，

$\therefore\triangle AF_1F_2$是等腰直角三角形，

$\therefore c=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，

$\therefore$椭圆的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

故答案为：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



16．设函数 $f\left(x\right)=asin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}bsin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ （a>0），若∀x∈**R**，|f（x）|≤|f（0）|，则 $\frac{1}{a}-2b$ 的最小值为 ____.

【答案】$2\sqrt{2}$

【解析】函数 $f\left(x\right)=asin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}bsin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$=asin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}bcos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sqrt{a^2+3b^2}sin\left(x+\frac{\pi}{6}-\varphi\right)$，其中 $tan\varphi=\frac{\sqrt{3}b}{a}$，$a$>0，

因为∀x∈**R**，|f（x）|≤|f（0）|，

所以 f（0）为函数 f（x）的最值，

则有 $0+\frac{\pi}{6}-\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi，k\in Z$，

故 $\varphi=-\frac{\pi}{3}-k\pi，k\in Z$，

所以 $tan\varphi=tan\left(-\frac{\pi}{3}-k\pi\right)=tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$，

故 $\frac{\sqrt{3}b}{a}=-\sqrt{3}$．，

所以 b=﹣a，a>0，

故 $\frac{1}{a}-2b=\frac{1}{a}+2a\geq 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot 2a}=2\sqrt{2}$，

当且仅当 $\frac{1}{a}=2a$，即 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号，

所以 $\frac{1}{a}-2b$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$．

故答案为：$2\sqrt{2}$．

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．（一）必考题：共 60 分．

17．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$．

（1）求证数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$为等差数列；

（2）设$b_n=a_na_{n+1}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n．

【答案】（1）证明见解析；（2）$T_n=2-\dfrac{4}{n+2}$．

【解析】（1）数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$．整理得$a_na_{n+1}=2a_n-2a_{n+1}$，

故$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2}$（常数），

所以数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是以1为首项，$\dfrac{1}{2}$为公差的等差数列．

（2）由于数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是以1为首项，$\dfrac{1}{2}$为公差的等差数列．

所以$\dfrac{1}{a_n}=1+\dfrac{1}{2}(n-1)=\dfrac{n+1}{2}$，故$a_n=\dfrac{2}{n+1}$

所以$b_n=a_na_{n+1}=\dfrac{2}{n+1}\cdot\dfrac{2}{n+2}=4(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2})$，

则：$T_n=4(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2})=4(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2})=2-\dfrac{4}{n+2}$．

18．某中学高三年级组为了解学生主动预习与学习兴趣是否有关，随机抽取一个容量为n的样本进行调查．调查结果表明，主动预习的学生占样本容量的$\dfrac{13}{15}$，学习兴趣高的学生占样本容量的$\dfrac{2}{3}$，主动预习且学习兴趣高的学生占样本容量的$\dfrac{3}{5}$．

（1）完成下面2×2列联表．若有97.5%的把握认为主动预习与学习兴趣有关，求样本容量n的最小值；

	学习兴趣高	学习兴趣一般	合计
主动预习	$\frac{3}{5}n$		$\frac{13}{15}n$
不太主动预习			
合计	$\frac{2}{3}n$		n

（2）该校为了提高学生的数学学习兴趣，用分层抽样的方法从“学习兴趣一般”的学生中抽取10人，组成数学学习小组，现从该小组中随机抽取3人进行摸底测试，记3人中“不太主动预习”的人数为X，求X的分布列和数学期望$E(X)$．

附： $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\ \ k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.076	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

【答案】（1）270；（2）分布列见解析； $E(X)=\dfrac{3}{5}$.

【解析】（1） 2×2 列联表如下：

	学习兴趣高	学习兴趣一般	合计
主动预习	$\dfrac{3}{5}n$	$\dfrac{4}{15}n$	$\dfrac{13}{15}n$
不太主动预习	$\dfrac{1}{15}n$	$\dfrac{1}{15}n$	$\dfrac{2}{15}n$
合计	$\dfrac{2}{3}n$	$\dfrac{1}{3}n$	n

则 $K^2=\dfrac{n(\frac{3}{5}n\cdot\frac{1}{15}n-\frac{4}{15}n\cdot\frac{1}{15}n)^2}{\frac{13}{15}n\cdot\frac{2}{15}n\cdot\frac{2}{3}n\cdot\frac{1}{3}n}=\dfrac{n}{52}$，

因为有 97.5% 的把握认为主动预习与学习兴趣有关，

所以 $\dfrac{n}{52}\ \ 5.024$，解得 $n\ \ 251.248$，

结合题意，正整数 n 是 15 的倍数，

所以 n 的最小值为 270；

（2）由（1）可知，“学习兴趣一般”的学生中，

“主动预习”与“不太主动预习”的学生人数之比为 $4:1$，

因此用分层抽样的方法，从“学习兴趣一般”的学生中抽取 10 人中，“不太主动预习”的人数为 2，

所以 $X\sim H(3，2，10)$，

所以 $P(X=0)=\dfrac{C_8^3}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{15}$，

$P(X=1)=\dfrac{C_2^1C_8^2}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{15}$

$P(X=2)=\dfrac{C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{15}$，

所以 X 的分布列为：

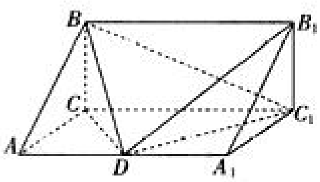
X	0	1	2
P	$\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{1}{15}$

则 $E(X)=\dfrac{3\times 2}{10}=\dfrac{3}{5}$.

19．如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$B_1C_1\perp$平面 AA_1C_1C，D 是 AA_1 的中点，ΔACD 是边长为 1 的等边三角形.

（1）证明：$CD\perp B_1D$；

（2）若 $BC=\sqrt{3}$，求二面角 $B-C_1D-B_1$ 的大小.



【答案】（1）证明见解析；（2）$30°$.

【解析】（1）证明：$\because \Delta ACD$ 是边长为 1 的等边三角形，

$\therefore \angle ADC=60°$，$\angle DA_1C_1=120°$，

$\because D$ 是 AA_1 的中点，

$\therefore AD=A_1D=A_1C_1$，即△ A_1C_1D 是等腰三角形，

$\therefore \angle A_1DC_1=30°$，从而 $\angle CDC_1=90°$，即 $CD\perp C_1D$.

$\because B_1C_1\perp$平面 AA_1C_1C，且 $CD\subset$平面 AA_1C_1C，

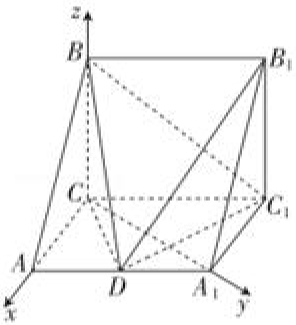
$\therefore B_1C_1\perp CD$，

又 $B_1C_1\bigcap C_1D=C_1$，$B_1C_1\subset$平面 B_1C_1D，$C_1D\subset$平面 B_1C_1D，

$\therefore CD\perp$ 平面 B_1C_1D，

$\because B_1D\subset$ 平面 B_1C_1D，

$\therefore CD\perp B_1D$．



（2）解：连接 CA_1，

$\because CD=\dfrac{1}{2}AA_1$，$\therefore AC\perp CA_1$．

以 C 为原点，CA、CA_1、CB 所在的直线分别为 x、y、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $C(0,0,0)$，$B(0,0,\sqrt{3})$，$C_1(-1,\sqrt{3},0)$，$D(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0)$，$B_1(-1,\sqrt{3},\sqrt{3})$，

$\therefore \overrightarrow{BC_1}=(-1,\sqrt{3},-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{C_1D}=(\dfrac{3}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2},0)$，$\overrightarrow{B_1D}=(\dfrac{3}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\sqrt{3})$．

设平面 BDC_1 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\bullet\overrightarrow{BC_1}=0\\ \vec{m}\bullet\overrightarrow{C_1D}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}z=0\\ \dfrac{3}{2}x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=0\end{cases}$，

令 $x=\sqrt{3}$，则 $y=3$，$z=2$，$\therefore \vec{m}=(\sqrt{3},3,2)$，

由（1）知，平面 B_1C_1D 的一个法向量为 $\vec{n}=2\overrightarrow{CD}=(1,\sqrt{3},0)$，

$\therefore \cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\bullet\vec{n}}{|\vec{m}|\bullet|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{\sqrt{3+9+4}\times 2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

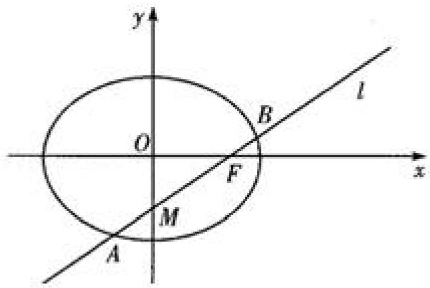
由图可知，二面角 $B-C_1D-B_1$ 为锐角，

故二面角 $B-C_1D-B_1$ 的大小为 $30°$．

20．如图，已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $(1,\frac{\sqrt{2}}{2})$，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，直线 l 经过椭圆 C 的右焦点 F，交椭圆于 A， B 两点．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程．

（Ⅱ）若直线 l 交 y 轴于点 M，且 $\overrightarrow{MA}=\lambda\overrightarrow{AF}$， $\overrightarrow{MB}=\mu\overrightarrow{BF}$，当直线 l 的倾斜角变化时， $\lambda+\mu$ 是否为定值？若是，请求出 $\lambda+\mu$ 的值；否则，请说明理由．



【答案】（1） $\frac{x^2}{2}+y^2=1$；（2） -4．

【解析】（Ⅰ）设椭圆的半焦距为 c，

则有 $\begin{cases}\frac{1}{a^2}+\frac{1}{2b^2}=1\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得 $a=\sqrt{2},b=1,c=1$，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知， $F(1,0)$，由条件得直线 l 的斜率必存在，

设方程为 $y=k(x-1)$，又 $M(0,-k)$，设 $A(x_1，\ y_1)$， $B(x_2，\ y_2)$，

则由 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=k(x-1)\end{cases}$，解得 $(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{4k^2}{1+2k^2},x_1x_2=\frac{2k^2-2}{1+2k^2}$，

因为 $\overrightarrow{MA}=\lambda\overrightarrow{AF}$，

则有 $(x_1，\ y_1+k)=\lambda(1-x_1，\ -y_1)$，

所以 $\lambda=\dfrac{x_1}{1-x_1}$，

同理可得 $\mu=\dfrac{x_2}{1-x_2}$，

所以 $\lambda+\mu=\dfrac{x_1}{1-x_1}+\dfrac{x_2}{1-x_2}=\dfrac{x_1+x_2-2x_1x_2}{1-(x_1+x_2)+x_1x_2}=\dfrac{\dfrac{4k^2}{1+2k^2}-\dfrac{4(k^2-1)}{1+2k^2}}{1-\dfrac{4k^2}{1+2k^2}+\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}}=-4$，

即 $\lambda+\mu$ 是定值 -4．

21．已知 e 是自然对数的底数，函数 $f(x)=2e^{x-1}-ax^2$，其中 $a\in R$．

（1）当 $a=1$ 时，若 $g(x)=f'(x)$，求 $g(x)$ 的单调区间；

（2）若 $f(x)$ 在 R 上恰有三个零点，求 a 的取值范围．

【答案】（1） $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；（2） $(\dfrac{e}{2},+\infty)$．

【解析】（1）当 $a=1$ 时， $f'(x)=2e^{x-1}-2x$

令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=2e^{x-1}-2$，

$\therefore$ 当 $x<1$ 时， $g'(x)<0$， $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减；

当 $x>1$ 时 $g'(x)>0$， $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增．

$\therefore f'(x)=g(x)\quad g$ （1） $=0$． $\therefore f(x)$ 在 R 上单调递增．

（2） $\because f(0)=\dfrac{2}{e}\neq 0$， $\therefore f(x)$ 的零点 $x\neq 0$，

令 $f(x)=2e^{x-1}-ax^2=0$，可得 $a=\dfrac{2e^{x-1}}{x^2}$，

设 $h(x)=\dfrac{2e^{x-1}}{x^2}(x\neq 0)$，

$\therefore h'(x)=\dfrac{2e^{x-1}\cdot x^2-2e^{x-1}\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{2e^{x-1}(x-2)}{x^3}$，

令 $h'(x)=0$，得 $x=2$，且 $h(2)=\dfrac{e}{2}$，

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $h'(x)>0$， $h(x)$ 单调递增且 $h(x)\in(0，+\infty)$；

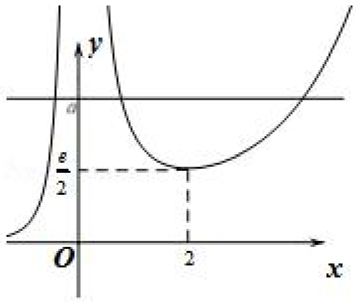
当 $x\in(0,2)$ 时， $h'(x)<0$， $h(x)$ 单调递减且 $h(x)\in(\dfrac{e}{2},+\infty)$；

当 $x\in(2,+\infty)$ 时， $h'(x)>0$， $h(x)$ 单调递增且 $h(x)\in(\dfrac{e}{2},+\infty)$，

作图 $h(x)$ 的大致图象，如图所示，

由图象可知，当 $a>\dfrac{e}{2}$ 时， $y=a$ 与 $y=h(x)$ 的图象有三个交点，即 $f(x)$ 有三个不同的零点，

$\therefore a$ 的取值范围是 $(\frac{e}{2},+\infty)$.



（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

22．在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\alpha \\ y=1+\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数)，M 是 C_1 上的动点，动点 P 满足 $OP=3OM$ ．

（1）求动点 P 的轨迹 C_2 的参数方程；

（2）在以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中，射线 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 与 C_1 异于极点的交点为 A，与 C_2 异于极点的交点为 B，求 AB .

【答案】（1） $\begin{cases} x=3\cos\alpha \\ y=3+3\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数)；（2）2.

【解析】（1）设 $P(x,y)$， $M(x_0，\ y_0)$，由 $\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OM}$ ，得 $\begin{cases} x=3x_0 \\ y=3y_0 \end{cases}$ ①，

又 M 的 C_1 上，$\therefore \begin{cases} x_0=\cos\alpha \\ y_0=1+\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数)，②

将②代入①得 $\begin{cases} x=3\cos\alpha \\ y=3+3\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数)，即为 C_2 的参数方程.

（2）解法一： C_1 的参数方程化为普通方程为 $x^2+y^2-2y=0$，

对应的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$， C_2 的参数方程化为普通方程为 $x^2+y^2-6y=0$，

对应的极坐标方程为 $\rho=6\sin\theta$，

当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时， $A(1,\frac{\pi}{6}),B(3,\frac{\pi}{6})$，

$\therefore |AB|=|\rho_1-\rho_2|=|1-3|=2$.

解法二：C_1 的参数方程化为普通方程为 $x^2+y^2-2y=0$，C_2 的参数方程化为普通方程为 $x^2+y^2-6y=0$，

又射线 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 化为普通方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x(x\quad 0)$，

联立 C_1 与射线方程解得 A 点直角坐标为 $(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2})$，

联立 C_2 与射线方程解得 B 点直角坐标为 $(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2})$．

$\therefore |AB|=\sqrt{(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2+(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2})^2}=2$．

23．已知关于 x 的不等式 $|x-4|+|x-m|\quad 2m$ 的解集为 R．

（1）求 m 的最大值；

（2）若 a，b，c 都是正实数，且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{3c}=1$，求证：$a+2b+3c\quad 9$．

【答案】（1）$\dfrac{4}{3}$；（2）证明见解析.

【解析】（1）解：当 $m<0$ 时，不等式 $|x-4|+|x-m|\quad 2m$ 恒成立，解集为 R，满足题意；

当 $m\quad 0$ 时，

①$0\quad m<4$ 时，$|x-4|+|x-m|\quad |(x-4)-(x-m)|=4-m$，

由不等式 $|x-4|+|x-m|\quad 2m$ 的解集为 R，可得 $4-m\quad 2m$，

解得：$0\quad m\quad \dfrac{4}{3}$；

②$m=4$ 时，不等式 $|x-4|+|x-m|\quad 2m$，即为 $2|x-4|\quad 8$，解得 $x\quad 0$ 或 $x\quad 8$，不满足题意；

③$m>4$ 时，$|x-4|+|x-m|\quad m-4$，

由不等式 $|x-4|+|x-m|\quad 2m$ 的解集为 R，可得 $m-4\quad 2m$，

解得：$m\quad -4$，与 $m>4$ 矛盾；

综上所述，$m\quad \dfrac{4}{3}$，$\therefore m$ 的最大值为 $\dfrac{4}{3}$．

（2）证明：$\because \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{3c}=1(a$，$b$，$c>0)$，

$\therefore$ 由柯西不等式得：

$$3=\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{2b}\cdot\frac{1}{\sqrt{2b}}+\sqrt{3c}\cdot\frac{1}{\sqrt{3c}}\quad \sqrt{a+2b+3c}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}},$$

整理得 $a+2b+3c\quad 9$，当且仅当 $a=2b=3c$，即 $a=3$，$b=\dfrac{3}{2}$，$c=1$ 时取等号．