汕头市2022～2023学年度普通高中毕业班教学质量监测试题

数学科参考答案与评分标准

第Ⅰ卷

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	B	D	B	A	B	C	ACD	ACD	ABC	AB

8.【解析】

因为$f(0)=2\sin\varphi=1$，可得$\sin\varphi=\frac{1}{2}$，

因为函数$f(x)$在$x=0$处附近单调递增，所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$，$\therefore f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，

因为$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{3\pi\omega}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-1$，则$\sin\left(\frac{3\pi\omega}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，

因为函数$f(x)$在$x=\frac{3\pi}{2}$处附近单调递减，且$f(x)$在$x>0$时在$x=\frac{3\pi}{2}$处第一次取值为$-\frac{1}{2}$，

所以$\frac{3\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$，可得$\omega=\frac{2}{3}$，$\therefore f(x)=2\sin\left(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$.

对于A选项，函数$f(x)$的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$，A错；

对于B选项，$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{4\pi}{9}+\frac{\pi}{6}\right)\neq 2$，所以，$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$不是函数$f(x)$的最大值，B错；

对于C选项，当$0\le x\le 5\pi$时，$\frac{\pi}{6}\le\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{6}\le\frac{7\pi}{2}$，

由$f(x)=0$可得$\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{6}\in\{\pi,2\pi,3\pi\}$，可得$x\in\left\{\frac{5\pi}{4},\frac{11\pi}{4},\frac{17\pi}{4}\right\}$，

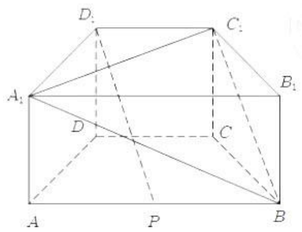
所以，函数$f(x)$在区间$[0,5\pi]$上恰好有三个零点，C对；

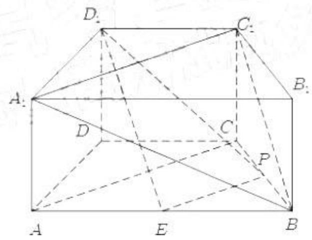
对于D选项，$f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left[\frac{2}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\frac{2x}{3}$，

故函数 $f\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 是奇函数，D 错.

11.【解析】

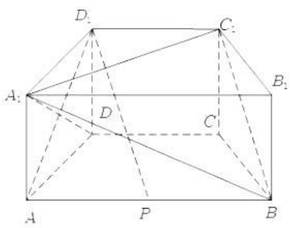
A 选项，当 P 是 AB 的中点时，依题意可知 $C_1D_1//DC//PB$，$C_1D_1=DC=PB$，所以四边形 D_1PBC_1 是平行四边形，所以 $D_1P//C_1B$，由于 $D_1P\not\subset$ 平面 A_1BC_1，$C_1B\subset$ 平面 A_1BC_1，所以 $D_1P//$ 平面 A_1BC_1，A 选项正确.

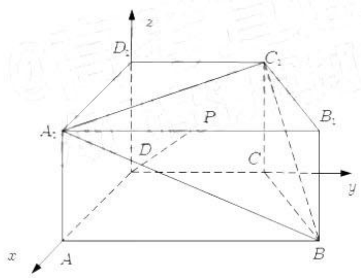




B 选项，设 E 是 AB 的中点，P 是 BC 的中点，由上述分析可知 $D_1E//$ 平面 A_1BC_1. 由于 $PE//AC//A_1C_1$，$PE\not\subset$ 平面 A_1BC_1，$A_1C_1\subset$ 平面 A_1BC_1，所以 $PE//$ 平面 A_1BC_1. 由于 $D_1E\cap PE=E$，所以平面 $D_1PE//$ 平面 A_1BC_1，所以 $D_1P//$ 平面 A_1BC_1. B 选项正确.

C 选项，根据已知条件可知四边形 ADD_1A_1 是正方形，所以 $A_1D\perp D_1A$，由于 $AB\perp AD$，$AB\perp AA_1$，$AD\cap AA_1=A$，所以 $AB\perp$ 平面 ADD_1A_1，所以 $AB\perp A_1D$. 由于 $D_1A\cap AB=A$，所以 $A_1D\perp$ 平面 AD_1P，所以 $A_1D\perp D_1P$. C 选项正确.





D 选项，建立如图所示空间直角坐标系，

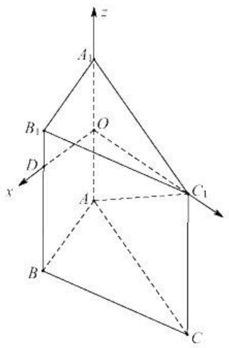
$\overrightarrow{A_1B}=(0,4,-2),\overrightarrow{A_1C_1}=(-2,2,0)$. 设 $P(2,t,2),t\in[0,4]$. $\begin{cases}\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{A_1B}=4t-4=0\\ \overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=-4+2t=0\end{cases}$，此方程组无解，所以在棱 A_1B_1 上不存在点 P，使得 $DP\perp$ 平面 A_1BC_1. D 错误.

$\therefore OC_1 \perp$ 平面 AA_1B_1B （2分）

作 $OD \perp AA_1$ 交在 BB_1 于点 D， 则 $B_1D = OA_1 - A_1B_1\cos\angle AA_1B_1 = 1$ （3分）

如图所示，以 O 为原点，直线 OD 、OA_1 、OC_1 分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，

则 $A_1(0,2,0)$， $B_1(\sqrt{3},1,0)$， $C_1(0,0,2\sqrt{3})$， （4分）



$\therefore \overrightarrow{A_1C_1} = (0,-2,2\sqrt{3})$， $\overrightarrow{A_1B_1} = (\sqrt{3},-1,0)$，

设 $\vec{n} = (x,y,z)$ 为平面 $A_1B_1C_1$ 的法向量，则

$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1} = -2y + 2\sqrt{3}z = 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1} = \sqrt{3}x - y = 0 \end{cases}$， 令 $x=1$，得 $\vec{n} = (1,\sqrt{3},1)$，（6 分）

又 $\vec{m} = (0,0,1)$ 是平面 ABB_1A_1 的法向量， （7分）

$\therefore \cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle = \dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ （8分）

$\therefore$ 平面 $A_1B_1C_1$ 与平面 ABB_1A_1 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. （9 分）

(2) 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的高 h 即为点 A 到平面 $A_1B_1C_1$ 的距离, （10 分）

$\because \overrightarrow{AA_1} = (0,4,0)$, $\therefore h = \dfrac{|\overrightarrow{AA_1}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|} = \dfrac{4\sqrt{15}}{5}$. （12 分）

20.【答案】

(1) 记 $A_1 =$ “球员甲出任边锋”、 $A_2 =$ “球员甲出任前卫”、 $A_3 =$ “球员甲出任中场”，

$B =$ “球队获胜”，则 （1 分）

$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$ （4分）

$= 0.5\times0.6 + 0.3\times0.8 + 0.2\times0.7 = 0.68$ （5分）

故球队输球的概率为 $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.68 = 0.32$ （6分）

(2) $P(A_2|B) = \dfrac{P(A_2B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_2)\cdot P(B|A_2)}{P(B)}$ （8分）

$= \dfrac{0.3\times0.8}{0.68} = \dfrac{12}{34}$ （9分）

所以数列$\left\{\dfrac{1}{T_n}\right\}$是首项为3，公差为2的等差数列.（5分）

(2) 由（1）知$\dfrac{1}{T_n}=3+2(n-1)=2n+1$，$T_n=\dfrac{1}{2n+1}$，（6分）

$\therefore a_n=1-2T_n=\dfrac{2n-1}{2n+1}$，（7分）

$\therefore \ln a_n=\ln(2n-1)-\ln(2n+1)$（8分）

$\therefore S_n=(\ln 1-\ln 3)+(\ln 3-\ln 5)+\cdots+\left[\ln(2n-1)-\ln(2n+1)\right]=-\ln(2n+1)$（10 分）

18.【答案】

(1) 由正弦定理得：$\sin A=\sin B\cos A-\cos A\sin B=\sin(B-A)$（2分）

$\because A$、$B\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\therefore B-A\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，（3分）

$\therefore A=B-A$，即$B=2A$；（4 分）

(2) 由正弦定理得：

$$\frac{b+c}{a}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=\frac{\sin 2A+\sin 3A}{\sin A}$$（6分）

$$=\frac{2\sin A\cos A+\sin A\cos 2A+\cos A\sin 2A}{\sin A}$$

$$=2\cos A+\cos 2A+2\cos^2 A=4\cos^2 A+2\cos A-1$$（8分）

由$A\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$B=2A\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$C=\pi-3A\in(0,\dfrac{\pi}{2})$得：$A\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4})$，（10 分）

$\therefore \cos A\in(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$（11 分）

$\therefore \dfrac{b+c}{a}$的取值范围是$(\sqrt{2}+1,\sqrt{3}+2)$.（12 分）

19.【答案】

(1) 证明：取AA_1中点O，连结OC_1，则$OC_1\perp AA_1$，（1分）

$\because$平面$AA_1C_1C\perp$平面AA_1B_1B，平面$AA_1C_1C\cap$平面$AA_1B_1B=AA_1$，$OC_1\subset$平面AA_1C_1C，

12.【解析】

若 $f(x)<f(a)+f'(a)(x-a)$

即 $x^3-a^3-2(x^2-a^2)-4(x-a)<(3a^2-4a-4)(x-a)$

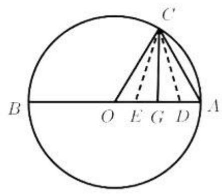
$\Leftrightarrow x^2+a^2+ax-2(x+a)-4<3a^2-4a-4\Leftrightarrow(x-a)[x+2(a-1)]<0$

$\Leftrightarrow x+2(a-1)<0$ 矛盾，故选项 C 错误.

第 II 卷

题号	13	14	15	16
答案	511	$\frac{1}{2}$	$-x^2+2x-1$（答案不唯一）	$300-150\sqrt{3}$

16.【详解】



如图，连接 AC，作 $CG\perp AB$ 于 G，

由题意，$AC=AO=OC=10\text{cm}$，故 $\angle OAC=60^\circ$，

所以 $CG=CA\cdot\sin60^\circ=5\sqrt{3}\text{cm}$.

设 $CE=a,CD=b,ED=c$，则 $S_{\triangle CED}=\frac{1}{2}ab\sin30^\circ=\frac{1}{2}c\cdot CG$，即 $ab=10\sqrt{3}c$.

由余弦定理 $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，结合基本不等式 $\sqrt{3}ab=a^2+b^2-\frac{a^2b^2}{300}\ge 2ab-\frac{a^2b^2}{300}$，

即 $ab\ge300(2-\sqrt{3})$，当且仅当 $a=b=\sqrt{300(2-\sqrt{3})}$ 时取等号.

故 $S_{四边形CEC_1D}=2S_{\triangle CED}=\frac{1}{2}ab\ge300-150\sqrt{3}$.

17.【答案】

(1) 当 $n=1$ 时，$a_1+2T_1=1$，即 $T_1+2T_1=1$，则 $\frac{1}{T_1}=3$，　（2分）

当 $n\ge2$ 时，由 $a_n+2T_n=1$ 得：$\frac{T_n}{T_{n-1}}+2T_n=1$，即 $\frac{1}{T_n}-\frac{1}{T_{n-1}}=2$，　（4分）

(3)同(2)，$P\left(A_1|B\right)=\dfrac{0.5\times0.6}{0.68}=\dfrac{15}{34}$，（10 分）

$P\left(A_3|B\right)=\dfrac{0.2\times0.7}{0.68}=\dfrac{7}{34}$，（11 分）

$\therefore P\left(A_1|B\right)>P\left(A_2|B\right)>P\left(A_3|B\right)$

故多安排球员甲打边锋，球队相对更易取胜.（12 分）

21.【答案】

(1)定义域$\left(0,+\infty\right)$（1分）

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-ax+a-1=\dfrac{-(x-1)(ax+1)}{x}$（2分）

①当$a\geq0$时，由$f'(x)=0$得：$x=1$

列表得：（3分）

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘

②当$a=-1$时，$f'(x)\geq0$，$\therefore f(x)$在$\left(0,+\infty\right)$上递增；（4分）

③当$a<-1$时，由$f'(x)=0$得：$x=1$或$x=<1\left(-\dfrac{1}{a},1\right)$

列表得：（5分）

x	$\left(0,-\dfrac{1}{a}\right)$	$-\dfrac{1}{a}$	$\left(-\dfrac{1}{a},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

④当$-1<a<0$时，由$f'(x)=0$得：$x=1$或$x=-\dfrac{1}{a}>1$

列表得：（6分）

x	$(0,1)$	1	$\left(1,-\frac{1}{a}\right)$	$-\frac{1}{a}$	$\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

综上述：

当$a\geq0$时，$f(x)$在$(0,1)$上递增，在$(1,+\infty)$上递减；

当$a=-1$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上递增；

当$a<-1$时，$f(x)$在$\left(0,-\frac{1}{a}\right)$、$(1,+\infty)$上递增，在$\left(-\frac{1}{a},1\right)$上递减；

当$-1<a<0$时，$f(x)$在$(0,1)$、$\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$上递增，在$\left(1,-\frac{1}{a}\right)$上递减.

(2) 不妨设$0<x_1<x_2$，

$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}-\frac{1}{2}a(x_1+x_2)+a-1$，$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{2}{x+x_2}-a\frac{x_1+x_2}{2}+a-1$

令$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，即$\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=\frac{2}{x_1+x_2}$，（7分）

$$\therefore \ln\frac{x_1}{x_2}=\frac{2\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)}{\frac{x_1}{x_2}+1},\ (*)$$ （8分）

设$t=\frac{x_1}{x_2}\in(0,1)$，令$g(t)=\ln t-\frac{2t-2}{t+1}$，则$g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}\geqslant0$

$\therefore g(t)$在$(0,1)$上递增，$\therefore g(t)<g(1)=0$，（11 分）

$\therefore$方程$(*)$无解，即不存在这样的点A与B.（12 分）

22.【答案】

(1) 设$T(x_0,y_0)$，则$y_0^2=1-\frac{x_0^2}{4}$，

设过点T与圆C_2相切的直线的方程为$y-y_0=k\left(x-x_0\right)$，（1分）

则$\frac{\left|kx_0-y_0\right|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，即$\left(5x_0^2-4\right)k^2-10x_0y_0k+5y_0^2-4=0$，（3分）

记直线TP、TQ的斜率分别为k_1、k_2，则$k_1k_2=\frac{5y_0^2-4}{5x_0^2-4}=\frac{5\left(1-\frac{x_0^2}{4}\right)-4}{5x_0^2-4}=-\frac{1}{4}$，（5分）

故直线TP与TQ斜率之积是定值；

(2)设直线TP的方程为$y-y_0=k_1\left(x-x_0\right)$，$P\left(x_1,y_1\right)$，

由$\begin{cases}y-y_0=k_1\left(x-x_0\right)\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$得：$\left(1+4k_1^2\right)x^2+8k\left(y_0-k_1x_0\right)x+4\left(y_0-k_1x_0\right)^2-4=0$，

$\therefore x_1+x_0=-\frac{8k_1\left(y_0-k_1x_0\right)}{1+4k_1^2}$，（7分）

设直线TQ的方程为$y-y_0=k_2\left(x-x_0\right)$，$Q\left(x_2,y_2\right)$，

同理可得：$x_2+x_0=-\frac{8k_2\left(y_0-k_2x_0\right)}{1+4k_2^2}$，（9分）

$\therefore\left(x_1+x_0\right)+\left(x_2+x_0\right)=-\frac{8k_1\left(y_0-k_1x_0\right)}{1+4k_1^2}-\frac{8k_2\left(y_0-k_2x_0\right)}{1+4k_2^2}$

$=-\frac{8k_1\left(y_0-k_1x_0\right)}{1+4k_1^2}-\frac{8\left(-\frac{1}{4k_1}\right)\left(y_0+\frac{1}{4k_1}x_0\right)}{1+4\left(-\frac{1}{4k_1}\right)^2}=-\frac{8k_1\left(y_0-k_1x_0\right)}{1+4k_1^2}+\frac{8k_1\left(y_0+\frac{1}{4k_1}x_0\right)}{1+4k_1^2}$

$=\frac{2x_0+8k_1^2x_0}{1+4k_1^2}=2x_0$，（11分）

$\therefore x_1+x_2=0$，即O为PQ中点，

故P、O、Q三点共线.（12分）

关于我们