一、选择题

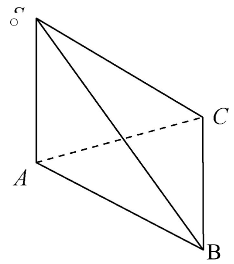
1. C 【解析】依题意，$1+z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}(1-\mathrm{i})=-1-\mathrm{i}$，解得 $z=-2-\mathrm{i}$，所以复数 z 在复平面内对应的点为 $(-2,-1)$，位于第三象限.

2. C 【解析】因为 $A=\{x\mid x^2-2x-8\leqslant 0,x\in\mathbf{N}^*\}=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 4,x\in\mathbf{N}^*\}=\{1,2,3,4\}$，所以 $\complement_U A=\{5,6\}$.

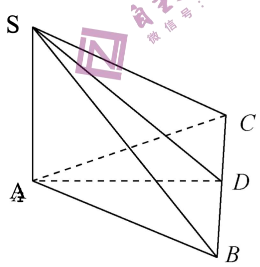
3. D 【解析】选项 A：当打分结果为 98，98，98，98，98 时，满足平均数为 98，中位数为 98，所以 A 错误；选项 B：当打分结果为 99，99，96，95，94 时，满足中位数为 96，众数为 99，所以 B 错误；选项 C：当打分结果为 89，97，97，97，98 时，满足中位数为 97，极差为 9，所以 C 错误；选项 D：假设没有评委打满分，结合极差为 6 可得总成绩 $S\leqslant(99-6)+99\times4=489$，则平均数 $\overline{x}\leqslant\dfrac{489}{5}=97.8<98$，与选项不符，故假设不成立，所以当平均数为 98，极差为 6 时，一定有评委打满分.

4. D 【解析】由 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$ 两边平方得 $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=10$，即 $4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4-4\times1\times|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}+|\boldsymbol{b}|^2=10$，即 $|\boldsymbol{b}|^2-2\sqrt{2}\cdot|\boldsymbol{b}|-6=0$，则 $(|\boldsymbol{b}|-3\sqrt{2})(|\boldsymbol{b}|+\sqrt{2})=0$，解得 $|\boldsymbol{b}|=3\sqrt{2}$.

5. B 【解析】依题意，由三视图可得几何体的直观图如图①所示：



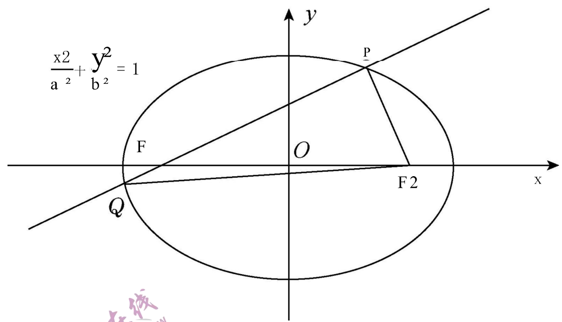
①



②

在三棱锥 S-ABC 中，$SA\perp$ 底面 ABC，且底面三角形 ABC 为边长为 2 的等边三角形.如图②，取 BC 的中点 D，连接 SD，AD，则 $SB=SC=\sqrt{SA^2+AB^2}=\sqrt{5}$，所以 $SD=\sqrt{SB^2-BD^2}=2$，则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，$S_{\triangle SAB}=S_{\triangle SAC}=\dfrac{1}{2}\times2\times1=1$，$S_{\triangle SBC}=\dfrac{1}{2}\times2\times2=2$，所以该几何体的表面积 $S=\sqrt{3}+1+1+2=4+\sqrt{3}$.

6. D 【解析】由已知，可根据条件作出下图：



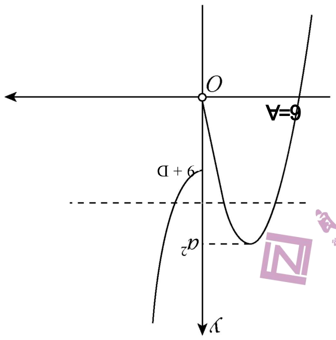
因为 $|PF_1|=2|PF_2|=5|F_1Q|$，令 $|F_1Q|=t$，所以 $|PF_1|=5t$，$|PF_2|=\dfrac{5}{2}t$，由椭圆的定义可知 $|PF_1|+|PF_2|=2a=5t+\dfrac{5}{2}t=\dfrac{15}{2}t$，所以 $t=\dfrac{4}{15}a$，所以 $|PF_1|=\dfrac{4}{3}a$，$|PF_2|=\dfrac{2}{3}a$，$|F_1Q|=\dfrac{4}{15}a$，$|PQ|=|PF_1|+|F_1Q|=\dfrac{4}{3}a+\dfrac{4}{15}a=\dfrac{24}{15}a$，由椭圆的定义可知 $|QF_1|+|QF_2|=2a$，得 $|QF_2|=\dfrac{26}{15}a$.在 $\triangle PQF_2$ 中，$|QF_2|^2=|QP|^2+|PF_2|^2$，所以 $\angle QPF_2=\dfrac{\pi}{2}$，在 $\triangle PF_1F_2$ 中，$|F_1F_2|=2c$，所以 $|F_1F_2|^2=|F_1P|^2+|PF_2|^2$，所以 $\dfrac{16}{9}a^2+\dfrac{4}{9}a^2=4c^2$，即 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{5}{9}$，得 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

7. B 【解析】由题意可知，当 m 为偶数时，可得 $2n\leqslant m$，则 $b_m=\dfrac{m}{2}$；当 m 为奇数时，可得 $2n\leqslant m-1$，则 $b_m=\dfrac{m-1}{2}$，所以 $b_m=\begin{cases}\dfrac{m-1}{2}(m\text{ 为奇数}),\\ \dfrac{m}{2}(m\text{ 为偶数}).\end{cases}$ 则当 m 为偶数时，$S_m=b_1+b_2+\cdots+b_m=\dfrac{1}{2}(1+2+\cdots+m)-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{m}{2}=\dfrac{m^2}{4}$，则 $\dfrac{m^2}{4}=30$，因为 $m\in\mathbf{N}^*$，所以无解；当 m 为奇数时，$S_m=b_1+b_2+\cdots+b_m=S_{m+1}-b_{m+1}=\dfrac{(m+1)^2}{4}-\dfrac{m+1}{2}=\dfrac{m^2-1}{4}$，所以 $\dfrac{m^2-1}{4}=30$，因为 $m\in\mathbf{N}^*$，所以 $m=11$.

8. C 【解析】设线段 AB 的中点为 M，则 $M(a,1)$，当 $a=0$ 时，存在点 $P(0,1)$ 满足 $|PA|=|PB|$；当 $a\neq0$ 时，直

线 AB 的斜率 $k=\frac{0-2}{2a-0}=-\frac{1}{a}$，所以线段 AB 的垂直平分线 l 的方程为 $y=a(x-a)+1$，整理得 $ax-y-a^2+1=0$.若 $|PA|=|PB|$，则直线 l 与圆 O 有公共点，所以 $\frac{|a^2-1|}{\sqrt{a^2+1}}\leqslant 1$，整理得 $a^4-3a^2\leqslant 0$，因为 $a\neq 0$，所以 $a^2-3\leqslant 0$，解得 $a\in[-\sqrt{3},0)\cup(0,\sqrt{3}]$.综上可知，$a$ 的取值范围是 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$.

9. A 【解析】当 $x\geqslant 0$ 时，$f'(x)=e^x-1\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)_{\min}=f(0)=a+6$；当 $x<0$ 时，$f(x)=-(x-a)^2+a^2$，当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增，则 $g(x)=f(x)-9$ 在 $\mathbf{R}$ 上最多有两个零点，不满足题意，所以 $a<0$，此时 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,a)$ 上单调递增，在区间 $(a,0)$ 上单调递减，$f(x)_{\max}=f(a)=a^2$.作出函数 $f(x)$ 的图象，要使函数 $g(x)=f(x)-9$ 有三个零点，由图象可知 $\begin{cases}a^2>9,\\a+6\leqslant 9,\end{cases}$ 解得 $a<-3$.综上可知，a 的取值范围是 $(-\infty,-3)$.



10. B 【解析】因为当 $1<x_1<x_2$ 时，$[f(x_1)-f(x_2)]\cdot(x_1-x_2)>0$ 恒成立，所以当 $1<x_1<x_2$ 时，$f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x_2)>f(x_1)$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增.因为函数 $f(x+1)$ 是偶函数，即 $f(1+x)=f(1-x)$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $a=f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)$，又函数 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单递调增，所以 $f(2)<f\left(\frac{5}{2}\right)<f(3)$，即 $f(2)<f\left(-\frac{1}{2}\right)<f(3)$，所以 $b<a<c$.

11. D 【解析】由题意知，双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，设直线方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+c)$，由 $\begin{cases}y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+c),\\y=-\frac{b}{a}x,\end{cases}$ 得 $y_A=\frac{c}{\sqrt{3}+\frac{a}{b}}$，同理可得 $y_B=\frac{c}{\sqrt{3}-\frac{a}{b}}$.因为 A 是 FB 的中点，所以 $y_B=2y_A$，即 $b=$

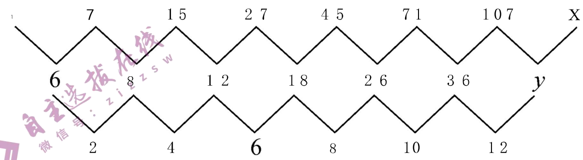
$\sqrt{3}a$，则 $c=\sqrt{a^2+b^2}=2a$，所以 $y_A=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$y_B=\sqrt{3}a$，得 $x_A=-\frac{1}{2}a$，$x_B=a$，所以 $x_C=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{a}{4}$，$y_C=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}a$，所以 $k_{OC}=\frac{y_C}{x_C}=3\sqrt{3}$.

12. B 【解析】令 $g(x)=e^x-(x+1)$，则 $g'(x)=e^x-1$，当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，当 $x<0$ 时，$g'(x)<0$，所以当 $x=0$ 时，$g(x)$ 取得最小值，即 $g(x)\geqslant g(0)=0$，所以 $e^x\geqslant x+1$，所以 $a=e^{-0.1}-1>-0.1+1-1=-0.1$；因为 $\tan x>x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $b=-\tan 0.1<-0.1$，令 $\varphi(x)=x-1-\ln x(x>0)$，则 $\varphi'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)>0$，所以当 $x=1$ 时，$\varphi(x)$ 取得最小值，所以 $\varphi(x)\geqslant\varphi(1)=0$，所以 $\ln x\leqslant x-1$，所以 $c=\ln 0.9<0.9-1=-0.1$；设 $f(x)=\ln(x+1)-\tan x$，$x\in(-1,0)$，$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x-(x+1)}{(x+1)\cos^2 x}$，设 $h(x)=\cos^2 x-(x+1)$，$h'(x)=-2\cos x\sin x-1=-\sin 2x-1$，在区间 $(-1,0)$ 上，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，所以 $h(x)>h(0)=0$，所以 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(-0.1)<f(0)$，即 $\ln 0.9-\tan(-0.1)<0$，所以 $c<b$.综上，$a>b>c$.

二、填空题

13. 1.2 【解析】因为 $\overline{x}=\frac{-2-1+0+1+2}{5}=0$，$\overline{y}=\frac{6.8+5.2+2.8+m-0.9}{5}=3.02$，所以 $m=1.2$.

14. 155 【解析】所给数列为高阶等差数列，设该数列的第 8 项为 x，根据所给定义：用数列的后一项减去前一项得到一个新数列，得到的新数列也用后一项减去前一项得到一个新数列，即得到了一个等差数列.如图：



由图可得 $\begin{cases}y-36=12,\\x-107=y,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=155,\\y=48.\end{cases}$

15. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 【解析】因为 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin(2\alpha+\beta)=2\sin\beta$，所以 $\sin[(\alpha+\beta)+\alpha]=2\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]$，$\tan\alpha>0$，$\tan\beta>0$，所以 $\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=2[\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha]$，即 $3\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha$，所以 $\tan(\alpha+\beta)=3\tan\alpha$，即 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=3\tan\alpha$，所以 $\tan\beta=\frac{2\tan\alpha}{1+3\tan^2\alpha}=\frac{2}{\frac{1}{\tan\alpha}+3\tan\alpha}\leqslant\frac{2}{2\sqrt{\frac{1}{\tan\alpha}\cdot 3\tan\alpha}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $\frac{1}{\tan\alpha}=3\tan\alpha$，即 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立，此时 $\tan\beta$ 取得最大值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

16. $(-\infty,-3]$ 【解析】由题意得 $f'(x)=\frac{2x^2-ax+2}{x}(x>0)$.若 $f(x)$ 有两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，则 x_1,x_2 是关于 x 的方程 $2x^2-ax+2=0$ 的两个不等的正实根.由 $\Delta=a^2-16>0$ 及方程根的情况，得 $a>4$，则 $x_1+x_2=\frac{a}{2}>2$，$x_1x_2=1$.又 $x_1<x_2$，所以 $0<$

$x_1<1<x_2$，要使 $f(x_1)>mx_2$ 恒成立，只需 $\frac{f(x_1)}{x_2}>m$ 恒成立. 又 $\frac{f(x_1)}{x_2}=\frac{x_1^2-ax_1+2\ln x_1}{x_2}=\frac{x_1^2-2x_1^2-2+2\ln x_1}{\frac{1}{x_1}}=-x_1^3-2x_1+2x_1\ln x_1$，令 $h(t)=-t^3-2t+2t\ln t(0<t<1)$，则 $h'(t)=-3t^2+2\ln t$，当 $0<t<1$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$ 为减函数，所以当 $0<t<1$ 时，$h(t)>h(1)=-3$. 由题意，要使 $f(x_1)\geqslant mx_2$ 恒成立，只需满足 $m\leqslant-3$，即实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-3]$.

三、解答题

17. **解**：(1)在 $\triangle ABC$ 中，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$，故 $\sqrt{3}c^2=\sqrt{3}ac\cdot\cos B+bc\sin A$.

又 $c\neq0$，所以 $\sqrt{3}c=\sqrt{3}a\cos B+b\sin A$， （2 分）

由正弦定理得 $\sqrt{3}\sin C=\sqrt{3}\sin A\cos B+\sin B\sin A$，

又 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

故 $\sqrt{3}\sin A\cos B+\sqrt{3}\cos A\sin B=\sqrt{3}\sin A\cos B+\sin B\sin A$，

即 $\sqrt{3}\cos A\sin B=\sin B\sin A$. （4 分）

因为 $\sin B\neq0$，所以 $\sqrt{3}\cos A=\sin A$，

所以 $\tan A=\sqrt{3}$，

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. （6 分）

(2)因为 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$，（8 分）

所以 $b+c=\frac{4}{\sqrt{3}}(\sin B+\sin C)$

$=\frac{4}{\sqrt{3}}\left[\sin B+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)\right]$

$=\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right)$

$=\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)$

$=4\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$. （10 分）

因为 $0<B<\frac{2\pi}{3}$，所以 $\frac{\pi}{6}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，

所以 $2<4\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant4$，当 $B=\frac{\pi}{3}$ 时取得最大值，

所以 $2<b+c\leqslant4$，即 $b+c$ 的取值范围是 $(2,4]$. （12 分）

18. **解**：(1)用频率估计概率，甲公司生产的动车的终到正点率不低于 0.95 的概率约为 $\frac{200}{300}=\frac{2}{3}$； （3 分）

乙公司生产的动车的终到正点率不低于 0.95 的概率约为 $\frac{190}{300}=\frac{19}{30}$. （6 分）

(2)因为 $K^2=\frac{600\times(100\times190-110\times200)^2}{210\times390\times300^2}=\frac{200}{273}<1$， （10 分）

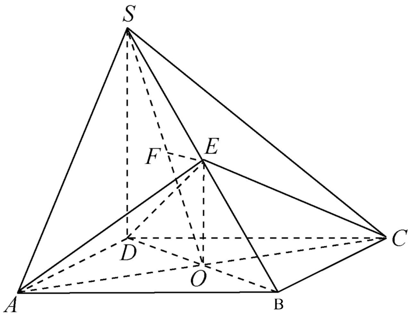
所以 $K^2<2.706$，所以没有 90% 的把握认为甲、乙两家公司生产的动车的终到正点率是否低于 0.95 与生产动车的公司有关. （12 分）

19. (1)**证明**：如图，连接 BD，因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC\perp BD$，

因为 $SD\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $SD\perp AC$， （2 分）

又因为 $SD\cap BD=D$，所以 $AC\perp$ 平面 SBD，

又因为 $DE\subset$ 平面 SBD，所以 $AC\perp DE$. （4 分）



(2)**解**：设点 E 到平面 ABC 的距离为 h，

则三棱锥 $E\text{-}ABC$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times AB\times BC\times\sin(180°-\angle DAB)\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times h=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，解得 $h=2$. （6 分）

因为 $SD\perp$ 平面 $ABCD$，$SD=4$，所以 $SD=2h$，即 E 是棱 SB 的中点，

设 $AC\cap BD=O$，如图，连接 EO，则 $EO\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $EO\perp DB$，

过点 E 作 SO 的垂线，垂足为 F，由(1)知，$AC\perp$ 平面 SBD，所以 $AC\perp EF$，

又 $AC\cap SO=O$，所以 $EF\perp$ 平面 SAC，

即线段 EF 的长度就是点 E 到平面 SAC 的距离. （8 分）

因为 $AB=AD=2$，$\angle BAD=60°$，所以 $BD=2$.

又因为 $S_{\triangle SOE}=S_{\triangle SDB}-(S_{\triangle SDO}+S_{\triangle EOB})=\frac{1}{2}\times BD\times SD-\left(\frac{1}{2}\times DO\times SD+\frac{1}{2}\times OB\times OE\right)=\frac{1}{2}\times2\times4-\left(\frac{1}{2}\times1\times4+\frac{1}{2}\times1\times2\right)=1$， （10 分）

因为 $SO=\sqrt{SD^2+DO^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$，

所以 $S_{\triangle SOE}=\frac{1}{2}\times SO\times EF=\frac{1}{2}\times\sqrt{17}\times EF=1$，

所以 $EF=\frac{2\sqrt{17}}{17}$，

即点 E 到平面 SAC 的距离为 $\frac{2\sqrt{17}}{17}$. （12 分）

20. **解**：(1)由题意，函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，可得 $f'(x)=3x^2+2ax+b$，

因为函数 $f(x)$ 的图象在点 $P(1,2)$ 处的切线斜率为 4，且在 $x=-1$ 处取得极值，

可得 $\begin{cases}f(1)=2,\\f'(1)=4,\\f'(-1)=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}1+a+b+c=2,\\3+2a+b=4,\\3-2a+b=0,\end{cases}$

解得 $a=1,b=-1,c=1$，

所以 $f(x)=x^3+x^2-x+1$， （3 分）

可得 $f'(x)=3x^2+2x-1$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-1$ 或 $x=\frac{1}{3}$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$\left(-1,\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	$\frac{22}{27}$	↗

所以函数 $f(x)$的单调递减区间是$\left(-1,\frac{1}{3}\right)$；单调递增区间是$(-\infty,-1)$，$\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$. （6 分）

(2)由(1)可得 $g(x)=f(x)+m-1=x^3+x^2-x+m$，

则 $g'(x)=f'(x)=3x^2+2x-1$， （8 分）

由上表知，函数 $g(x)$在 $x=-1$ 处取得极大值，在$x=\frac{1}{3}$处取得极小值，

要使得 $g(x)$有三个零点，则满足$\begin{cases}g(-1)>0,\\ g\left(\frac{1}{3}\right)<0,\end{cases}$

即$\begin{cases}m+1>0,\\ m-\frac{5}{27}<0,\end{cases}$解得$-1<m<\frac{5}{27}$， （10 分）

所以 m 的取值范围为$\left(-1,\frac{5}{27}\right)$. （12 分）

21. (1)**解**：由题意，$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$，当 $AB/\!/x$ 轴时，

将 $y=\frac{p}{2}$代入 $x^2=2py$，得 $x^2=p^2$，解得 $x=\pm p$. （2 分）

又$|AB|=2$，故 $2p=2$，解得 $p=1$.

故抛物线 C 的方程为 $x^2=2y$. （4 分）

(2)**证明**：由(1)，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 l 的方程为 $y=kx+\frac{1}{2}$，

与抛物线方程联立得 $x^2-2kx-1=0$，$\Delta>0$，故 $x_1+x_2=2k$，$x_1x_2=-1$. （5 分）

又抛物线方程为 $y=\frac{1}{2}x^2$，

故 $y'=x$，故切线 PA 的方程为 $y-\frac{1}{2}x_1^2=x_1(x-x_1)$，即 $y=x_1x-\frac{1}{2}x_1^2$，

同理可得切线 PB 的方程为 $y=x_2x-\frac{1}{2}x_2^2$，

联立$\begin{cases}y=x_1x-\frac{1}{2}x_1^2,\\ y=x_2x-\frac{1}{2}x_2^2,\end{cases}$可得$(x_1-x_2)x=\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)$，

解得 $x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$，代入 $y=x_1x-\frac{1}{2}x_1^2$ 中得 $y=\frac{1}{2}x_1(x_1+x_2)-\frac{1}{2}x_1^2=\frac{1}{2}x_1x_2$，

又 $x_1x_2=-1$，所以可得 $P\left(k,-\frac{1}{2}\right)$. （8 分）

故当 $k=0$ 时有 $l\perp PF$，

当 $k\neq 0$ 时，

因为 $k_{FP}=\dfrac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{k-0}=-\frac{1}{k}$，故 $k_{FP}\cdot k_l=-1$，也满足 $l\perp PF$，故 $l\perp PF$ 恒成立. （10 分）

又 $k_{PA}\cdot k_{PB}=x_1x_2=-1$，故 $PA\perp PB$.

所以$\angle PAB+\angle PBA=90°$，$\angle PAF+\angle APF=90°$，

故$\angle PBF=\angle APF$，

故 $Rt\triangle PBF\backsim Rt\triangle APF$，则$\frac{|BF|}{|PF|}=\frac{|PF|}{|AF|}$，

即$|PF^2|=|AF|\cdot|BF|$. （12 分）

22. **解**：(1)因为$\begin{cases}x=2\cos^2\alpha,\\ y=\sin 2\alpha,\end{cases}$所以$\begin{cases}x=\cos 2\alpha+1,\\ y=\sin 2\alpha,\end{cases}$

消去 α，得$(x-1)^2+y^2=1$， （2 分）

由 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，得 $\rho^2-2\rho\cos\theta=0$，

所以 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$. （4 分）

(2)因为$|OA|=\rho_A=2\cos\frac{\pi}{3}=1$，$|OB|=\rho_B=2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$，

又$\angle AOB=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times|OA|\times|OB|\times\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. （6 分）

因为 OM 是圆 C 的直径，所以$\angle OBM=\frac{\pi}{2}$，

又因为$|BM|=|OM|\times\sin\theta_2=2\times\frac{1}{2}=1$，

所以 $S_{\triangle MOB}=\frac{1}{2}\times|OB|\times|MB|=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{2}$， （8 分）

所以 $S_{四边形OABM}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOM}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. （10 分）

23. (1)**解**：由题意知 $f(x)=|x+1|+|x-3|=\begin{cases}-2x+2,x\leqslant -1,\\ 4,-1<x<3,\\ 2x-2,x\geqslant 3.\end{cases}$ （2 分）

当 $x\leqslant -1$ 时，$-2x+2>6$，解得 $x<-2$；

当$-1<x<3$ 时，$4<6$，不等式无解；

当 $x\geqslant 3$ 时，$2x-2>6$，解得 $x>4$.

综上所述，不等式 $f(x)>6$ 的解集为$\{x|x>4$ 或 $x<-2\}$. （5 分）

(2)**证明**：因为 $f(x)=|x+1|+|x-3|\geqslant|(x+1)-(x-3)|=4$，当且仅当$(x+1)(x-3)\leqslant 0$ 时取等号，

所以 $f(x)$的最小值为 4，即 $a+b+c=4$. （6 分）

因为 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，$b^2+c^2\geqslant 2bc$，$a^2+c^2\geqslant 2ac$，

所以 $2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2ab+2bc+2ca$，

即 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$，当且仅当 $a=b=c=\frac{4}{3}$时取等号， （8 分）

所以$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\geqslant 3(ab+bc+ca)$，

因为 $a+b+c=4$，所以 $ab+bc+ca\leqslant\frac{16}{3}$. （10 分）