

## 数 学 (文) (北京卷)

本试卷共 5 页, 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效。考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

### 第一部分 (选择题 共 40 分)

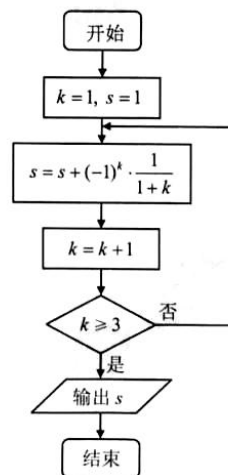
一、选择题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

- (1) 已知集合  $A = \{x \mid |x| < 2\}$ ,  $B = \{-2, 0, 1, 2\}$ , 则  $A \cap B =$
- (A)  $\{0, 1\}$  (B)  $\{-1, 0, 1\}$   
(C)  $\{-2, 0, 1, 2\}$  (D)  $\{-1, 0, 1, 2\}$

- (2) 在复平面内, 复数  $\frac{1}{1-i}$  的共轭复数对应的点位于
- (A) 第一象限 (B) 第二象限  
(C) 第三象限 (D) 第四象限

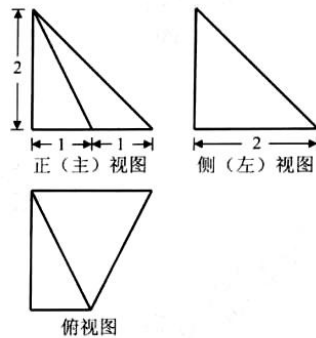
(3) 执行如图所示的程序框图, 输出的  $s$  值为

- (A)  $\frac{1}{2}$   
(B)  $\frac{5}{6}$   
(C)  $\frac{7}{6}$   
(D)  $\frac{7}{12}$

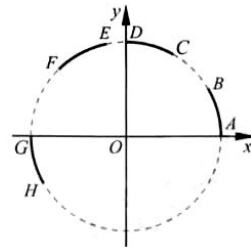


- (4) 设  $a, b, c, d$  是非零实数, 则 “ $ad = bc$ ” 是 “ $a, b, c, d$  成等比数列” 的
- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- (5) “十二平均律” 是通用的音律体系, 明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例, 为这个理论的发展做出了重要贡献. 十二平均律将一个纯八度音程分成十二份, 依次得到十三个单音, 从第二个单音起, 每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于  $\sqrt[12]{2}$ . 若第一个单音的频率为  $f$ , 则第八个单音的频率为
- (A)  $\sqrt[3]{2}f$  (B)  $\sqrt[3]{2^2}f$   
(C)  $\sqrt[12]{2^5}f$  (D)  $\sqrt[12]{2^7}f$
- (6) 某四棱锥的三视图如图所示, 在此四棱锥的侧面中, 直角三角形的个数为

- (A) 1  
(B) 2  
(C) 3  
(D) 4



- (7) 在平面直角坐标系中,  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{CD}$ ,  $\widehat{EF}$ ,  $\widehat{GH}$  是圆  $x^2 + y^2 = 1$  上的四段弧 (如图), 点  $P$  在其中一段上, 角  $\alpha$  以  $Ox$  为始边,  $OP$  为终边. 若  $\tan \alpha < \cos \alpha < \sin \alpha$ , 则  $P$  所在的圆弧是
- (A)  $\widehat{AB}$   
(B)  $\widehat{CD}$   
(C)  $\widehat{EF}$   
(D)  $\widehat{GH}$



- (8) 设集合  $A = \{(x, y) \mid x - y \geq 1, ax + y > 4, x - ay \leq 2\}$ , 则
- (A) 对任意实数  $a$ ,  $(2, 1) \in A$  (B) 对任意实数  $a$ ,  $(2, 1) \notin A$   
(C) 当且仅当  $a < 0$  时,  $(2, 1) \notin A$  (D) 当且仅当  $a \leq \frac{3}{2}$  时,  $(2, 1) \notin A$

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

- (9) 设向量  $a = (1, 0)$ ,  $b = (-1, m)$ . 若  $a \perp (ma - b)$ , 则  $m =$  \_\_\_\_\_.
- (10) 已知直线  $l$  过点  $(1, 0)$  且垂直于  $x$  轴. 若  $l$  被抛物线  $y^2 = 4ax$  截得的线段长为 4, 则抛物线的焦点坐标为 \_\_\_\_\_.
- (11) 能说明“若  $a > b$ , 则  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ”为假命题的一组  $a, b$  的值依次为 \_\_\_\_\_.
- (12) 若双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1 (a > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.
- (13) 若  $x, y$  满足  $x + 1 \leq y \leq 2x$ , 则  $2y - x$  的最小值是 \_\_\_\_\_.
- (14) 若  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + c^2 - b^2)$ , 且  $\angle C$  为钝角, 则  $\angle B =$  \_\_\_\_\_;  $\frac{c}{a}$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(15) (本小题 13 分)

设  $\{a_n\}$  是等差数列，且  $a_1 = \ln 2$ ， $a_2 + a_3 = 5 \ln 2$ 。

(I) 求  $\{a_n\}$  的通项公式；

(II) 求  $e^{a_1} + e^{a_2} + \dots + e^{a_n}$ 。

(16) (本小题 13 分)

已知函数  $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x$ 。

(I) 求  $f(x)$  的最小正周期；

(II) 若  $f(x)$  在区间  $[-\frac{\pi}{3}, m]$  上的最大值为  $\frac{3}{2}$ ，求  $m$  的最小值。

(17) (本小题 13 分)

电影公司随机收集了电影的有关数据，经分类整理得到下表：

电影类型	第一类	第二类	第三类	第四类	第五类	第六类
电影部数	140	50	300	200	800	510
好评率	0.4	0.2	0.15	0.25	0.2	0.1

好评率是指：一类电影中获得好评的部数与该类电影的部数的比值。

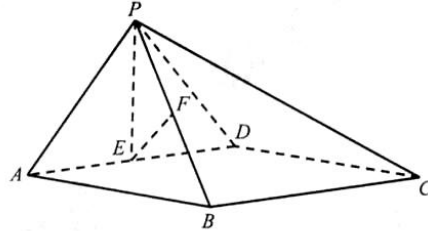
(I) 从电影公司收集的电影中随机选取 1 部，求这部电影是获得好评的第四类电影的概率；

(II) 随机选取 1 部电影，估计这部电影没有获得好评的概率；

(III) 电影公司为增加投资回报，拟改变投资策略，这将导致不同类型电影的好评率发生变化。假设表格中只有两类电影的好评率数据发生变化，那么哪类电影的好评率增加 0.1，哪类电影的好评率减少 0.1，使得获得好评的电影总部数与样本中的电影总部数的比值达到最大？（只需写出结论）

(18) (本小题 14 分)

如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为矩形, 平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $PA \perp PD$ ,  $PA=PD$ ,  $E, F$  分别为  $AD, PB$  的中点.



- (I) 求证:  $PE \perp BC$ ;  
 (II) 求证: 平面  $PAB \perp$  平面  $PCD$ ;  
 (III) 求证:  $EF \parallel$  平面  $PCD$ .

(19) (本小题 13 分)

设函数  $f(x) = [ax^2 - (3a+1)x + 3a+2]e^x$ .

- (I) 若曲线  $y = f(x)$  在点  $(2, f(2))$  处的切线斜率为 0, 求  $a$ ;  
 (II) 若  $f(x)$  在  $x=1$  处取得极小值, 求  $a$  的取值范围.

(20) (本小题 14 分)

已知椭圆  $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ , 焦距为  $2\sqrt{2}$ . 斜率为  $k$  的直线  $l$  与椭圆  $M$  有两个不同的交点  $A, B$ .

- (I) 求椭圆  $M$  的方程;  
 (II) 若  $k=1$ , 求  $|AB|$  的最大值;  
 (III) 设  $P(-2, 0)$ , 直线  $PA$  与椭圆  $M$  的另一个交点为  $C$ , 直线  $PB$  与椭圆  $M$  的另一个交点为  $D$ . 若  $C, D$  和点  $Q(-\frac{7}{4}, \frac{1}{4})$  共线, 求  $k$ .

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注