三

天一大联考
“顶尖计划”2023 届高中毕业班第四次考试
理科数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. D	2. B	3. A	4. C	5. A	6. D
7. A	8. D	9. D	10. C	11. C	12. B

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 8　　14. $\sqrt{7}$

15. $x=-\frac{3}{4}$　　16. $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. 解析 (Ⅰ)由 $a_{n+1}=ka_n+n-1$,

得 $a_{n+1}+n+1=ka_n+n-1+n+1=ka_n+2n$, ……（2 分）

因为数列$\{a_n+n\}$为等比数列,

所以$\frac{a_{n+1}+n+1}{a_n+n}=\frac{ka_n+2n}{a_n+n}$为定值,所以 $k=2$. ……（4 分）

(Ⅱ)因为 $a_1+1=2$,所以$\{a_n+n\}$是首项为 2,公比为 2 的等比数列.

所以 $a_n+n=2\times2^{n-1}=2^n$,即 $a_n=2^n-n$. ……（6 分）

所以 $2^na_n=4^n-n\cdot2^n$,

所以 $S_n=4+4^2+\cdots+4^n-[1\times2+2\times2^2+\cdots+(n-1)\cdot2^{n-1}+n\times2^n]$. ……（7 分）

设 $T_n=1\times2+2\times2^2+\cdots+(n-1)\times2^{n-1}+n\times2^n$,

则 $2T_n=1\times2^2+2\times2^3+\cdots+(n-1)\times2^n+n\times2^{n+1}$, ……（8 分）

两式相减可得 $-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\times2^{n+1}=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\times2^{n+1}=2^{n+1}-2-n\times2^{n+1}$,

所以 $T_n=(n-1)2^{n+1}+2$. ……（10 分）

又 $4+4^2+\cdots+4^n=\frac{4(1-4^n)}{1-4}=\frac{4^{n+1}-4}{3}$, ……（11 分）

故 $S_n=\frac{4^{n+1}-4}{3}-(n-1)2^{n+1}-2=\frac{4^{n+1}}{3}-(n-1)2^{n+1}-\frac{10}{3}$. ……（12 分）

18. 解析 (Ⅰ)由已知 $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{200\times(40\times90-60\times10)^2}{50\times150\times100\times100}=24$, ……（3 分）

因为 $24>6.635$,

所以有 99% 的把握认为附近群众的早餐饮食习惯与年龄有关. ……（5 分）

(Ⅱ)由题意知 X 的所有可能取值为 0,1,2,3, ……（6 分）

则 $P(X=0)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}(1-m)=\frac{4-4m}{15}$,

$P(X=1)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}(1-m)+\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}(1-m)+\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}m=\frac{8-4m}{15}$, ……………………………………（7 分）

$P(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}(1-m)+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}m+\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}m=\frac{3+5m}{15}$,

$P(X=3)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}m=\frac{m}{5}$. ……………………………………………………………………（8 分）

所以 X 的分布列如下：

X	0	1	2	3
P	$\frac{4-4m}{15}$	$\frac{8-4m}{15}$	$\frac{3+5m}{15}$	$\frac{m}{5}$

故 $E(X)=0\times\frac{4-4m}{15}+1\times\frac{8-4m}{15}+2\times\frac{3+5m}{15}+3\times\frac{m}{5}=\frac{14}{15}+m$. ……………………………（10 分）

因为 $E(X)+E(Y)=3$,$E(X)>E(Y)$,所以 $E(X)>\frac{3}{2}$, ………………………………………………（11 分）

即 $\frac{14}{15}+m>\frac{3}{2}$,解得 $m>\frac{17}{30}$,

所以 m 的取值范围为 $\left(\frac{17}{30},1\right)$. ……………………………………………………………（12 分）

19. 解析 （Ⅰ）如图,连接 BD,与 AC 交于点 O,取 AB 的中点 G,连接 PG,MO,则 $PG\perp AB$.

又平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$,平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$,所以 $PG\perp$ 平面 $ABCD$. ……………………（2 分）

设 H 为 CD 的中点,连接 QH,OH,则 GH 过点 O,且 O 是 GH 的中点.

同理可证 $QH\perp$ 平面 $ABCD$,又 $PG=QH$,所以四边形 $PGHQ$ 为矩形.

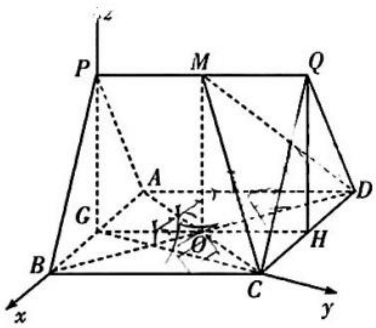
所以 $MO/\!/PG$,$MO/\!/QH$,所以 $MO\perp$ 平面 $ABCD$,

又 $AC\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $MO\perp AC$, ……………………………………………………………（4 分）

因为四边形 $ABCD$ 为菱形,所以 $AC\perp BD$, ……………………………………………………………（5 分）

又 $MO\cap BD=O$,所以 $AC\perp$ 平面 OMD.

又 $MD\subset$ 平面 OMD,所以 $AC\perp DM$. ……………………………………………………………（6 分）



（Ⅱ）连接 CG,根据题意,$CG\perp AB$,可知 BC,CG,PG 两两互相垂直,故以 G 为原点,GB,GC,GP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴,建立空间直角坐标系 $G-xyz$,如图所示.

则 $P\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$Q\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$C\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,$D\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,$M\left(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

所以 $\overrightarrow{CM}=\left(-\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{CQ}=\left(-\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{CD}=(-1,0,0)$, ……………………………（7 分）

设平面 CQM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{CM}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{CQ}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ $\begin{cases}-\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{4}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\\ -\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，则 $\boldsymbol{n}=\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. ………………………………………………………… (9 分)

同理可得，平面 CDM 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,2,1)$. ………………………………………… (10 分)

设二面角 $D-CM-Q$ 的平面角为 θ，

则 $|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{3}}{\text{[illegible]}}=\frac{3}{5}$，

由图可知，二面角 $D-CM-Q$ 的余弦值为 $\frac{3}{5}$. ………………………………………… (12 分)

20. 解析 (Ⅰ)当 $a=\frac{e^2}{2}$ 时，$f(x)=(x-1)e^x-\frac{e^2}{2}x^2$，

则 $f'(x)=e^x+(x-1)e^x-e^2x=x(e^x-e^2)$. ………………………………………… (2 分)

令 $f'(x)>0$，得 $x<0$ 或 $x>2$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<2$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，………… (4 分)

所以 $f(x)_{极大值}=f(0)=-1$，$f(x)_{极小值}=f(2)=-e^2$. ………………………………………… (5 分)

(Ⅱ)由 $f(x)+(2-x)e^x\geqslant(2-a)x+a$，得 $e^x-ax^2\geqslant(2-a)x+a$，

即 $e^x-2x\geqslant a(x^2-x+1)$，因为 $x^2-x+1>0$，所以 $a\leqslant\frac{e^x-2x}{x^2-x+1}$. ………………………… (6 分)

令 $h(x)=\frac{e^x-2x}{x^2-x+1}(x\geqslant0)$，

则 $h'(x)=\frac{(x^2-x+1)(e^x-2)-(2x-1)(e^x-2x)}{(x^2-x+1)^2}=\frac{(x-1)[(x-2)e^x+2(x+1)]}{(x^2-x+1)^2}$. ………… (8 分)

令 $\varphi(x)=(x-2)e^x+2(x+1)(x\geqslant0)$，则 $\varphi'(x)=(x-1)e^x+2$.

令 $q(x)=(x-1)e^x+2$，则 $q'(x)=xe^x$，

因为当 $x\geqslant0$ 时，$q'(x)=xe^x\geqslant0$，

所以 $\varphi'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$\varphi'(x)\geqslant\varphi'(0)=1$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$. ………………………………………… (10 分)

所以当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

所以当 $x\geqslant0$ 时，$h(x)_{\min}=h(1)=e-2$，

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,e-2]$. ………………………………………… (12 分)

21. 解析 (Ⅰ)由椭圆定义可知 $|DF_1|+|DF_2|=2a=4$，$a=2$，………………………………………… (1 分)

由 $S_{\triangle DF_1F_2}=\frac{1}{2}|DF_1||DF_2|\sin\angle F_1DF_2=\frac{3}{2}$ 可得 $\sin\angle F_1DF_2=\frac{4}{5}$，

因为 $|DF_2|>|F_1F_2|$，所以 $\angle F_1DF_2$ 不可能为钝角，所以 $\cos\angle F_1DF_2=\frac{3}{5}$. ………………… (2 分)

在 $\triangle DF_1F_2$ 中，由余弦定理可得 $|F_1F_2|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2-2\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{5}}=2$，

即 C 的焦距为 $2c=2,c=1$，所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，…………（4分）

故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………（5分）

（Ⅱ）不妨取 G 点在 H 点的左侧，要证 O,A,N,M 四点共圆，

只需证明 $\angle NAO+\angle NMO=\pi$，即 $\tan\angle NAO=-\tan\angle NMO$.

又 $\tan\angle NAO=-\tan\angle HAO=-k_{AH}$，$\tan\angle NMO=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\angle MOP\right)=\frac{1}{\tan\angle MOP}=\frac{1}{k_{OM}}$，

故待证结论转化为证明 $k_{AH}\cdot k_{OM}=1$. …………（6分）

设 $G(x_1,y_1)$，$H(x_2,y_2)$，$M(x_M,y_M)$，

由题意可知 $A(-2,0)$，则直线 $AG:x=\frac{x_1+2}{y_1}y-2$，直线 $AH:x=\frac{x_2+2}{y_2}y-2$.

因为 M 在直线 l 上，所以 $x_M=-6$，代入直线 AG 的方程，可知 $y_M=\frac{-4y_1}{x_1+2}$，

故点 M 的坐标为 $\left(-6,\frac{-4y_1}{x_1+2}\right)$，所以 $k_{OM}=\frac{2y_1}{3(x_1+2)}$，…………（7分）

又 $k_{AH}=\frac{y_2}{x_2+2}$，故 $k_{AH}\cdot k_{OM}=1$ 等价于 $\frac{y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}=\frac{3}{2}$. …………（8分）

设直线 $GH:x=my-6$，与 C 的方程联立消去 x 得 $(3m^2+4)y^2-36my+96=0$，

所以 $y_1+y_2=\frac{36m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{96}{3m^2+4}$. …………（10分）

又 $(x_1+2)(x_2+2)=(my_1-4)(my_2-4)=m^2y_1y_2-4m(y_1+y_2)+16=m^2\cdot\frac{96}{3m^2+4}-4m\cdot\frac{36m}{3m^2+4}+16=$

$\frac{64}{3m^2+4}$，…………（11分）

所以 $\frac{y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}=\frac{\frac{96}{3m^2+4}}{\frac{64}{3m^2+4}}=\frac{3}{2}$，所以 $k_{AH}\cdot k_{OM}=1$.

综上 O,A,N,M 四点共圆. …………（12分）

22. **解析** （Ⅰ）由 $\begin{cases}x=t\\y=t^2\end{cases}$ 消去参数，得 $x^2=y$. …………（2分）

把 $\begin{cases}\rho\cos\theta=x,\\\rho\sin\theta=y\end{cases}$ 代入极坐标方程 $\rho^2=6\rho\cos\theta-8$，

得 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-6x+8=0$. …………（4分）

（Ⅱ）依题可设 $P(t,t^2)$，曲线 C_2 的方程可化为 $(x-3)^2+y^2=1$，表示以 $C(3,0)$ 为圆心，1 为半径的圆，$|PQ|$ 的最小值即 $|CP|$ 的最小值减去 1. …………（5分）

因为 $|CP|^2=(t-3)^2+(t^2-0)^2=t^4+t^2-6t+9$，…………（6分）

设 $f(x)=x^4+x^2-6x+9$，

$f'(x)=4x^3+2x-6=2(x-1)(2x^2+2x+3)$，

由于 $2x^2+2x+3=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}>0$ 恒成立，…………

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，即 $f(x)_{\min}=f(1)=5$，……（9 分）

所以 $|CP|_{\min}=\sqrt{5}>1$，即 $|PQ|$ 的最小值为 $\sqrt{5}-1$. ……（10 分）

23. **解析** （Ⅰ）$(a+1+b+1)^3=(a+1)^3+3(a+1)^2(b+1)+3(a+1)(b+1)^2+(b+1)^3$

$$=16+3(a+1)(b+1)(a+b+2)$$ ……（1 分）

$$\leqslant 16+\frac{3(a+1+b+1)^2}{4}(a+b+2)$$

$$=16+\frac{3(a+b+2)^3}{4},$$ ……（3 分）

所以 $(a+b+2)^3\leqslant 64$，因此 $a+b+2\leqslant 4$，$a+b\leqslant 2$，

当且仅当 $a=b=1$ 时，等号成立.

故 m 的值为 2. ……（5 分）

（Ⅱ）因为 $|2x-a|\leqslant 2$，$|2y-a|\leqslant 2$，所以 $|4y-2a|\leqslant 4$，

所以 $|2x-a|+|4y-2a|\leqslant 6$，……（6 分）

所以 $|(2x-a)-(4y-2a)|\leqslant|2x-a|+|4y-2a|\leqslant 6$，……（8 分）

即 $|2x-4y+a|\leqslant 6$. ……（10 分）