大庆市高三年级第三次教学质量检测试题

数学参考答案

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	D	C	B	D	C	A	B	BD	AB	ACD	AD

1.【答案】B

【详解】$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(2+i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$，其虚部为$-\frac{1}{2}$. 故选：B

2.【答案】D

【详解】集合 $A=(0,4)$,集合 $B=[2,+\infty)$,则 $A\cap B=[2,4)$. 故选：D

3.【答案】C

【详解】由题知$a_6\cdot a_8=a_7{}^2$，$\because a_3>0$，$\therefore a_7=8$. 故选：C

4.【答案】B

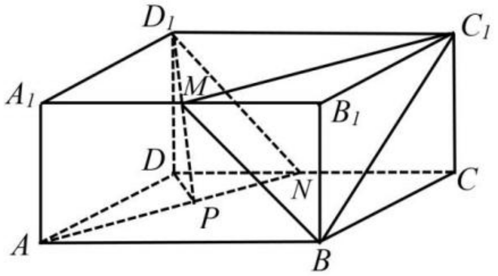
【详解】$\because\vec{a}\parallel\vec{b}$，$\therefore\sin\alpha=3\cos\alpha$，$\therefore\tan\alpha=3$，则$\frac{\sin2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=2\tan\alpha=6$. 故选：B

5.【答案】D

【详解】由题知直线 l 是以 B 为圆心，3 为半径的圆的切线，即直线 l 为圆 A 与圆 B 的公切线，满足题意的直线l的条数即为圆 A 与圆 B 的公切线条数，因为$|AB|=\sqrt{(2-3)^2+(1-4)^2}=\sqrt{10}>2+1$，所以两圆外离，所以两圆的公切线有 4 条，即满足条件的直线l有 4 条，故选：D.

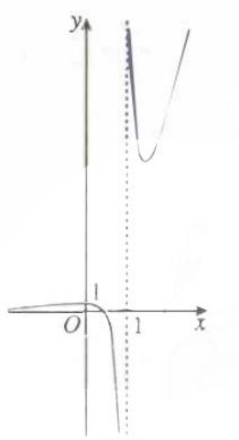
6. 【答案】C

【详解】直线D_1P与平面BMC_1没有交点，所以D_1P // 平面BMC_1，取CD中点N，连接D_1N,AN，易证：平面 AD_1N // 平面 BMC_1，故 P 在 AN 上运动，当 $DP\perp AN$ 时，DP 最小，最小值为$\frac{4\times2}{2\sqrt5}=\frac{4\sqrt5}{5}$，此时$\triangle D_1DP$的面积最小 $S_{\min}=\frac{1}{2}\times1\times\frac{4\sqrt5}{5}=\frac{2\sqrt5}{5}$. 故选：C



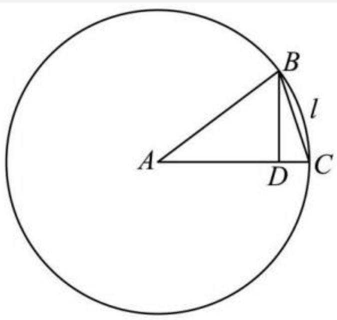
7. 【答案】A

【详解】由题意 $y'=\dfrac{xe^x(2x-3)}{(x-1)^2}$，因此函数 $y=\dfrac{e^x(2x-1)}{x-1}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，且当 $x\to-\infty$ 时，$y\to0$；当 $x=0$ 时，$y=1$；当 x 从1的左侧无限趋近于1时，$y\to-\infty$；当 x 从1的右侧无限趋近于1时，$y\to+\infty$；当 $x=\dfrac{3}{2}$ 时，$y=4e^{\frac{3}{2}}$；当 $x\to+\infty$ 时，$y\to+\infty$. 因此，函数 $y=\dfrac{e^x(2x-1)}{x-1}$ 的大致图象如图所示，作函数 $y=4e$ 的图象，因为 $1<4e<4e^{\frac{3}{2}}$，所以 $y=4e$ 与 $y=\dfrac{e^x(2x-1)}{x-1}$ 的图象无交点，可知方程 $f(x)=4e$ 无解. 故选：A



8.【答案】B

【详解】如图，单位圆 A 中，$\angle BAC=\theta$（不妨设 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$），$BD\perp AC$ 于 D，则弧 BC 的长度 $l=\theta$，$|BD|=\sin\theta$，由图易得，$l>|BC|>|BD|$，即 $\theta>\sin\theta$，所以 $a=\mathrm{e}^{-3}=\frac{1}{\mathrm{e}^3}>\frac{1}{25}=0.04>\sin0.04=c$.



设 $f(x)=\sin2x-\ln(1+x)$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$，则 $f'(x)=2\cos2x-\dfrac{1}{1+x}>1-\dfrac{1}{1+x}>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增，则 $f(0.02)>0$，即 $\sin0.04>\ln1.02$，即 $b<c$.综上，$b<c<a$. 故选：B.

9. 【答案】BD

【详解】解：对于 A，因为$P(A)=0.3$，$P(B)=0.6$，$A\subseteq B$，所以$P(AB)=P(A)=0.3$，故 A 错误；

对于 B，因为 A 与 B 互斥，所以$P(A+B)=P(A)+P(B)=0.3+0.6=0.9$，故 B 正确；对于 C，因为$P(A|B)=0.1$，即$\frac{P(AB)}{P(B)}=0.1$，所以$P(AB)=0.1\times P(B)=0.06$，又因为$P(A)\times P(B)=0.3\times 0.6=0.18$，所以$P(AB)\neq P(A)\cdot P(B)$，故C错误. 对于D，因为A与B相互独立，所以A与$\overline{B}$相互独立；因为$P(B)=0.6$，所以$P(\overline{B})=1-0.6=0.4$，所以$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=0.12$，故 D 正确. 故选：BD

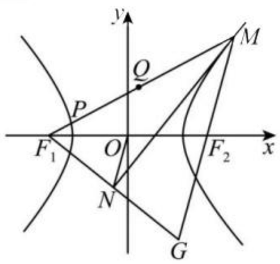
10. 【答案】AB

【详解】对于 A,因为筒车按逆时针方向每旋转一周用时 100 秒，所以$\omega=\frac{2\pi}{100}=\frac{\pi}{50}$，故 A 正确；

对于 B,因为当$t=0$时，盛水筒 P 位于点$P_0(2,-2\sqrt{3})$，所以$R=4$，所以有 $f(0)=4\sin\varphi=-2\sqrt{3}$，所以$\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=-\frac{\pi}{3}$，即$f(t)=4\sin\left(\frac{\pi}{50}t-\frac{\pi}{3}\right)$，$\therefore f(75)=4\sin\left(\frac{\pi}{50}\times 75-\frac{\pi}{3}\right)=4\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-2$，故 B 正确；对于 C,由 B 可知：盛水筒 P 的纵坐标为-2，设它的横坐标为x，所以有$\sqrt{x^2+(-2)^2}=4$，因为筒车旋转 75 秒时，所以此时盛水筒 P 在第三象限，故$x=-2\sqrt{3}$，盛水筒 P 和初始点P_0的距离为$\sqrt{(2+2\sqrt{3})^2+\left(-2\sqrt{3}+2\right)^2}=4\sqrt{2}$，故 C 错误；对于 D，因为$\frac{\pi}{50}t-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，则$t=\frac{250}{6}\notin(0,30]$，所以筒车在$(0,30]$秒的旋转过程中，盛水筒 P 最高点到x轴的距离的最大值不是 4，故 D 正确. 故选：AB

11. 【答案】ACD

【详解】不妨设M为双曲线$E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右支上一点，延长$MF_2$，$F_1N$交于点$G$，如图，



因为$\overrightarrow{F_1N}\cdot\overrightarrow{MN}=0$，所以$\overrightarrow{F_1N}\perp\overrightarrow{MN}$，即$F_1N\perp MN$，因为$MN$平分$\angle F_1MF_2$，所以$\Delta F_1MG$为等腰三角形，所以 N 为F_1G中点，又 O 为F_1F_2中点，所以$|ON|=\frac{1}{2}|F_2G|$，根据双曲线的定义得，$|MF_1|-|MF_2|=|MG|-|MF_2|=|GF_2|=2a$，所以，$|ON|=a=2$，因为双曲线$E$的渐近线方程为$2x\pm y=0$，所以$\frac{b}{a}=2$，得$b=4$，$c^2=b^2+a^2=20$，$c=2\sqrt{5}$，所以双曲线$E$的标准方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$，离心率为$e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$

所以 A 正确，B 不正确；设$M(x_1,y_1)$，代入$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$，即$\frac{x_1^2}{4}-\frac{y_1^2}{16}=1$，所以，点$M$到两条渐近线的距

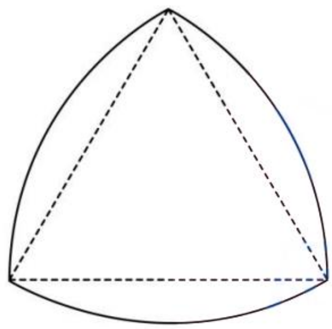
离之积为$\frac{|2x_1+y_1||2x_1-y_1|}{5}=\frac{|4x_1^2-y_1^2|}{5}=\frac{16}{5}$，所以 C 正确；设$P\left(x_2,y_2\right)$，$Q(x,y)$，因为$P$，$M$在双曲线$E$上，

所以$\frac{x_1^2}{4}-\frac{y_1^2}{16}=1$①，$\frac{x_2^2}{4}-\frac{y_2^2}{16}=1$②，①-②并整理得，$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=4$，因为$k_{MP}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2},k_{OQ}=\frac{y}{x}$

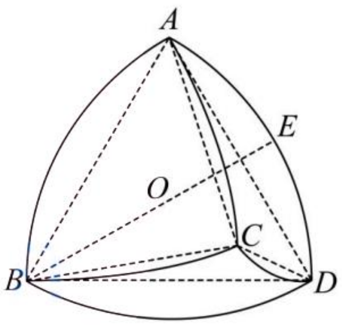
所以，$k_{OQ}\times k_{PM}=4$，所以 D 正确．故选：ACD．

12. 【答案】AD

【详解】平面ABC截勒洛四面体所得截面如图甲，它的面积为三个半径为 4，圆心角为 60°的扇形的面积减去两个边长为 4 的正三角形的面积，即$3\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times4^2-2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=8\pi-8\sqrt{3}$，故 A 正确；记该勒洛四面体上以$C$，$D$为球心的两球交线为弧$AB$，则该弧是以 CD 的中点$O$为圆心，以$2\sqrt{3}$为半径的圆弧，圆心角为$\angle AOB=\alpha$，则$\cos\alpha=\frac{1}{3}$，可知$\alpha\bullet2\sqrt{3}\neq\frac{4}{3}\pi$，所以弧长不等于$\frac{4\pi}{3}$，故 B 错误；如图乙，设弧$AB$的中点是$F$，线段$AB$的中点是$G$，设弧$CD$的中点是$H$，线段$CD$的中点是$J$，则四点$F,G,H,J$共线，且$EG=FH=2\sqrt{3}$，$FG=2\sqrt{2}$，$EF=GH=2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$，$EH=4\sqrt{3}-2\sqrt{2}$，即勒洛四面体表面上任意两点间距离可能大于 4，最大值为$4\sqrt{3}-2\sqrt{2}$故 C 错误；



图甲



图乙

勒洛四面体能容纳的最大球，与勒洛四面体的弧面相切，如图乙，其中点E为该球与勒洛四面体的一个切点，由对称性可知O为该球的球心，易知该球的球心O为正四面体$ABCD$的中心，半径为OE，连接BE，易知BOE三点共线，设正四面体$ABCD$的外接球半径为r，则由题意得：$\left(\frac{4\sqrt{6}}{3}-r\right)^2+\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2=r^2$，解得：$r=\sqrt{6}$，所以$BE=4,OB=\sqrt{6}$，$OE=4-\sqrt{6}$，故 D 正确； 故选：AD．

二、填空题

13. $x+y-3=0$

14. 14

15. 3；$(-\infty,4]$

16. 3

13. 【答案】 $x+y-3=0$

【详解】 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$，$f'(1)=-1$，$f(1)=2$，故答案为：$x+y-3=0$

14. 【答案】14

【详解】由图可知第一组的频率为 $0.04\times5=0.2<0.6$，前两组的频率之和为 $0.04\times5+0.1\times5=0.7>0.4$，

则可知其第 60 百分位数在 $[10,15)$ 内，设为 x，则 $0.1\times(x-10)=0.6-0.2$，解得 $x=14$．故答案为：14．

15. 【答案】3；$(-\infty,4]$

【详解】$f(x)=\frac{3e^x}{1+e^x}=3-\frac{3}{1+e^x}$，则 $f(x)+f(-x)=3$，因为 $y=1+e^x$ 在 R 上为增函数，所以 $f(x)=\frac{3e^x}{1+e^x}$

在 R 上为增函数，因为 $f(x)+f(-x)=3$，所以 $f(4-ax)+f(x^2)\geq3$ 可化为，$f(4-ax)\geq3-f(x^2)=$

$f(-x^2)$，因为 $f(x)$ 在 R 上为增函数，所以 $4-ax\geq-x^2$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，即 $a\leq x+\frac{4}{x}$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$

恒成立，因为 $x>0$，所以 $x+\frac{4}{x}\geq4$，当且仅当 $x=\frac{4}{x}$，即 $x=2$ 时取等号，所以 $a\leq4$，即实数 a 的取值范

围 $(-\infty,4]$，故答案为：$(-\infty,4]$

16. 【答案】 3

【详解】设 $P(x,y)$，由题意 $\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，整理得 $x^2+y^2=2$．$\because$ 圆 $\left(x+\sqrt{2}\right)^2+y^2=2$ 可

以看作把圆 $x^2+y^2=2$ 向左平移 $\sqrt{2}$ 个单位得到的，那么 A 点平移后变为 $D\left(-\sqrt{2},1\right)$，B 点平移后变为

$C\left(-\sqrt{2},2\right)$，所以根据阿氏圆的定义，$M$ 满足 $|MD|=\frac{\sqrt{2}}{2}|MC|$，结合抛物线定义 $|QH|=|QF|$，$\therefore\frac{\sqrt{2}}{2}|MC|+$

$|QH|+|QM|=|MD|+|QF|+|QM|\geq|DF|=3$（当且仅当 D，M，Q，F 四点共线，且 Q，M 在 D，F

之间时取等号），故 $\frac{\sqrt{2}}{2}|MC|+|QH|+|QM|$ 的最小值为 3．

17. 【答案】(1) $\frac{2\pi}{3}$ (2) 18

【详解】（1）解：由正弦定理可得，$\sqrt{3}\sin B=\sin A\left(\sqrt{3}\cos C-\sin C\right)$，

因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

代入上式，整理得，$\sqrt{3}\cos A\sin C=-\sin A\sin C$

又因为 $C\in(0,\pi)$，$\sin C\neq0$，

所以 $\tan A=-\sqrt{3}$，……………………………………………………………………………………3 分

又因为 $A\in(0,\pi)$，

解得 $A=\frac{2\pi}{3}$；……5 分

（2）由（1）知，$A=\frac{2\pi}{3}$，

因为△ABC内切圆半径为$\sqrt{3}$，

所以$\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$，即$(b+c+8)\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}bc$

$b+c+8=\frac{1}{2}bc$①，……7 分

由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot cos\frac{2\pi}{3}$得$b^2+c^2+bc=64$，

所以$(b+c)^2-bc=64$②……9 分

联立①②，得$(b+c)^2-2(b+c+8)=64$，解得$b+c=10$

所以△ABC的周长为$a+b+c=18$……10 分

18. 【答案】(1)证明见解析　　(2)$S_{2n}=\frac{(2n-1)n}{19}+\frac{n}{3(4n+3)}$

【详解】（1）当$n=1$时，可得$a_1=1$，……1 分

当$n\geq 2$时，$a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)a_n=n$，

$a_1+3a_2+\cdots+(2n-3)a_{n-1}=n-1(n\geq 2)$，

上述两式作差可得$a_n=\frac{1}{2n-1}(n\geq 2)$，……4 分

因为$a_1=1$满足$a_n=\frac{1}{2n-1}$，所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{2n-1}$……5 分

所以$\frac{1}{a_n}=2n-1$

因为$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=2n-1-(2n-3)=2$（常数）

所以$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是一个等差数列……6 分

（2）$c_n=\begin{cases}\frac{2n-1}{19},n\text{为奇数}\\ \frac{1}{(2n-1)(2n+3)},n\text{为偶数}\end{cases}$，……7 分

所以$C_1+C_3+\cdots C_{2n-1}=\frac{1+5+9+\cdots(4n-3)}{19}=\frac{(2n-1)n}{19}$，……9 分

$C_2+C_4+\cdots C_{2n}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\cdots\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)=\frac{n}{3(4n+3)}$……11 分

所以数列$\{c_n\}$的前 2n 项和$S_{2n}=\frac{(2n-1)n}{19}+\frac{n}{3(4n+3)}$……12 分

19.【答案】(1)证明见解析　　(2)答案见解析

【详解】(1) 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，由题意可得 $AA_1=B_1B$，$\angle AA_1B_1=\angle B_1BC$，$A_1B_1=BC$，

所以 $\triangle AA_1B_1\cong\triangle B_1BC$，所以 $AB_1=CB_1$

又因为 $AD=DC$，所以 $B_1D\perp AC$，……………………………………………………2 分

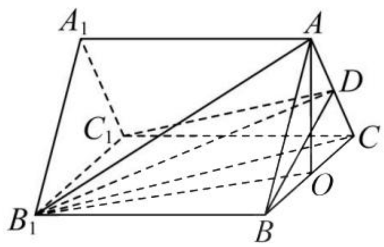
在 $\triangle ABC$ 中，因为 $AB=BC$，$AD=DC$，所以 $BD\perp AC$，……………………………3 分

因为 $B_1D\cap BD=D$，$B_1D,BD\subset$ 平面 BDB_1，

所以 $AC\perp$ 平面 BDB_1，……………………………………………………………5 分

又因为 $BB_1\subset$ 平面 BEB_1，所以 $AC\perp BB_1$，

又因为 $AA_1//BB_1$，所以 $AA_1\perp AC$………………………………………………6 分



(2) 因为 $BB_1\perp AC$，$BB_1\perp AB$ 且 $AC\cap AB=A$，所以 $BB_1\perp$ 平面 ABC，

因为 $\angle ABC=60^\circ$，$AB=BC$，所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times4\times4\times\sin60^\circ=4\sqrt{3}$，

又因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $12\sqrt{3}$，所以 $BB_1=3$……………………………7 分

取 BC 中点为 O，B_1C_1 中点为 O_1，连接 AO,OO_1

因为 $OO_1//BB_1$，所以 $OO_1\perp$ 平面 ABC

因为 $AB=AC$，所以 $AO\perp BC$

以 O 为原点，OO_1,OB,OA 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，如图，

则 $A(0,0,2\sqrt{3}),C(0,-2,0),C_1(3,-2,0),B_1(3,2,0),D(0,-1,\sqrt{3})$

由 (1) 知，$AC\perp$ 平面 BDB_1，所以平面 BDB_1 的一个法向量为 $\vec{m}=\overrightarrow{AC}=(0,-2,-2\sqrt{3})$，………8 分

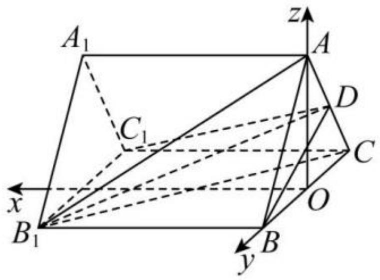
设平面 B_1DC_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，且 $\overrightarrow{C_1B_1}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{C_1D}=(-3,1,\sqrt{3})$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{C_1B_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{C_1D}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4y=0\\ -3x+y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $y=0$，$z=\sqrt{3}$，故 $\vec{n}=(1,0,\sqrt{3})$，……………………………………10 分

所以 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=-\frac{3}{4}$，

又二面角 $B-B_1D-C_1$ 的平面角为钝角，故二面角 $B-B_1D-C_1$ 的余弦值为 $-\frac{3}{4}$ ……………………………12 分



20. 【答案】(1)$\frac{369}{625}$；(2)分布列见解析，数学期望为$\frac{4}{5}$；(3)答案见解析.

【详解】（1）由题意可知，每个人选择“太空发射”的概率为$\frac{C_9^1}{C_{10}^2}=\frac{1}{5}$，则每个人不选择项目“太空发射”的概率为$\frac{4}{5}$，故甲、乙、丙、丁这 4 个人中至少有一人选择“太空发射”的概率 $1-\left(\frac{4}{5}\right)^4=\frac{369}{625}$…………3 分

（2）由（1）可知，每个人选择“太空发射”的概率为$\frac{C_9^1}{C_{10}^2}=\frac{1}{5}$，且每个人是否选择“太空发射”相互独立，

故 X 服从二项分布：$X\sim B\left(4,\frac{1}{5}\right)$，所以$P(X=k)=C_4^k\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{4-k}$，

$P(X=0)=C_4^0\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^4=\frac{256}{625}$，$P(X=1)=C_4^1\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{256}{625}$，

$P(X=2)=C_4^2\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{96}{625}$，$P(X=3)=C_4^3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^1=\frac{16}{625}$，$P(X=4)=C_4^4\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^0=\frac{1}{625}$，

则 X 的概率分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{256}{625}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$	$\frac{1}{625}$

………6 分

所以 X 的数学期望 $E(X)=4\times\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$. ……………………………………………………………7 分

（3）设选择“太空发射”的人数最有可能为 k 人，

则$\begin{cases}P(X=k)\geq P(X=k+1)\\P(X=k)\geq P(X=k-1)\end{cases}$，……………………………………………………9 分

$P(X=k)=C_n^k\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}=\frac{C_n^k\cdot 4^{n-k}}{5^n}$，

$\therefore\begin{cases}\frac{C_n^k\cdot 4^{n-k}}{5^n}\geq\frac{C_n^{k+1}\cdot 4^{n-k-1}}{5^n}\\\frac{C_n^k\cdot 4^{n-k}}{5^n}\geq\frac{C_n^{k-1}\cdot 4^{n-k+1}}{5^n}\end{cases}$，即$\begin{cases}\frac{4n!}{k!(n-k)!}\geq\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\\\frac{n!}{k!(n-k)!}\geq\frac{4n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\end{cases}$，

即$\begin{cases}\frac{4}{n-k}\geq\frac{1}{k+1}\\\frac{1}{k}\geq\frac{4}{n-k+1}\end{cases}$，也即$\begin{cases}4(k+1)\geq n-k\\n-k+1\geq 4k\end{cases}$

解得$\frac{n-4}{5} \le k \le \frac{n+1}{5}$，......10 分

又因为$k \in \mathbf{N}$，当$n=5m$，$m \in \mathbf{N}_+$且$m \ge 2$时，则不等式为$m-\frac{4}{5} \le k \le m+\frac{1}{5}$，

$k=m$，即当n被 5 整除时，选择“太空发射”的人数最有可能是$\frac{n}{5}$人．......12 分

21．【答案】(1)$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；(2)为定值，定值为 4，理由见解析

【详解】（1）由题意可得$\begin{cases} \frac{4}{a^2}=1 \\ \frac{1}{a^2}+\frac{e^2}{b^2}=1 \\ e=\frac{c}{a} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=\sqrt{3} \end{cases}$，

则 E 的方程$\frac{x^2}{4}+y^2=1$......4 分

（2△ OPQ 与△ MPQ 的面积之比是定值，定值为 4，理由如下：

设直线$AB: x=my+1$,（$m \ne 0$且$m \ne \pm 1$），$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases} x=my+1 \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$可得$(m^2+4)y^2+2my-3=0$，

则$y_1+y_2=\frac{-2m}{m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-3}{m^2+4}$......6 分

所以$y_p=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-m}{m^2+4}$，$x_p=my_p+1=\frac{4}{m^2+4}$

所以 P$\left(\frac{4}{m^2+4}，\frac{-m}{m^2+4}\right)$，......7 分

设$CD: x=-\frac{1}{m}y+1$，同理可得 Q$\left(\frac{4m^2}{4m^2+1}，\frac{-m}{4m^2+1}\right)$......8 分

所以$\frac{1}{k_{PQ}}=\frac{\frac{4m^2}{4m^2+1}-\frac{4}{m^2+4}}{\frac{-m}{4m^2+1}-\frac{-m}{m^2+4}}=\frac{4(m^2+1)}{3m}$，

所以直线 PQ:$x-\frac{4}{m^2+4}=\frac{4(m^2+1)}{3m}\left(y+\frac{m}{m^2+4}\right)$即$x=\frac{4(m^2+1)}{3m}y+\frac{4}{3}$

所以 PQ 恒过定点 N$\left(\frac{4}{3},0\right)$，......10 分

设点 O、M 到直线 PQ 的距离分别是d_1,d_2，

则$\frac{S_{\triangle OPQ}}{S_{\triangle MPQ}}=\frac{\frac{1}{2}|PQ|d_1}{\frac{1}{2}|PQ|d_2}=\frac{d_1}{d_2}=\frac{|ON|}{|MN|}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}-1}=4$......12 分

22．【答案】（1）$(-\infty，0)$；（2）不存在

解：(1)$f'(x)=e^{ax}\left(a\ln x+\frac{1}{x}+ab\right)(x>0)$......1 分

令$f'(x)=0$，则$a\ln x+\frac{1}{x}+ab=0$．设$g(x)=a\ln x+\frac{1}{x}+ab$，$g'(x)=\frac{ax-1}{x^2}$

若$a=0$，则$f'(x)=\frac{1}{x}>0$，不合题意舍去……2 分

若$a>0$，则$g'(x)$在$\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$递减，在$\left(\frac{1}{a},\ +\infty\right)$递增.

取b，使得$g(x)$的最小值$g\left(\frac{1}{a}\right)=aln\frac{1}{a}+a+ab>0$.

则$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,\ +\infty)$递增，不合题意舍去……3 分

若$a<0$，则$g(x)$在$(0,\ +\infty)$递减

取$x>1$且$x>e^{\frac{-ab-1}{a}}$，使得$alnx+ab+\frac{1}{x}<alnx+ab+1<0$.

再取$0<x<1$且$\frac{1}{x}>-ab$，使得$alnx+ab+\frac{1}{x}>ab+\frac{1}{x}>0$.

$\therefore g(x)$在$(0,\ +\infty)$上有唯一的零点，即$f(x)$有且仅有个极值点，满足题意.

综上a的取值范围是$(-\infty,\ 0)$……5 分

（2）假设存在满足题意.

由（1）知 $alnx_0+ab+\frac{1}{x_0}=0$……①

且$e^{ax_0}(lnx_0+b)\in[-e,\ 0]$……②……7 分

显然$a\neq0$，由①得$lnx_0+b=-\frac{1}{ax_0}$将其代入②得

$-\frac{e^{ax_0}}{ax_0}\in[-e,\ 0]$，令$t=ax_0$，则$\frac{e^t}{t}\in(0,\ e]$.

令$\varphi(t)=\frac{e^t}{t}$，则$\varphi'(t)=\frac{e^t(t-1)}{t^2}(t>0)$

$\therefore\varphi(t)$在$(0,\ 1)$递减，在$(1,\ +\infty)$递增.

$\therefore\varphi(t)\geq\varphi(1)=e$，又$\varphi(t)\in(0,\ e]$，$\therefore\varphi(t)=e$.

$\therefore t=1$，即$ax_0=1$，$x_0=\frac{1}{a}$且$a>0$……10 分

由（1）知，当$a>0$时，$g(x)$在$\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$递减，在$\left(\frac{1}{a},\ +\infty\right)$递增.

$g(x)_{min}=g(x_0)=0$. $g(x)\geq0$. $f'(x)\geq0$. $\therefore$ $f(x)$在$(0,\ +\infty)$无极值点.

$\therefore$ 不存在这样的a，b满足题意……12 分