

2024 年普通高等学校招生全国统一考试模拟 (一)

数学

本试卷共 6 页, 22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本套题由穿山蜀黍 Chuan_shan 命制, 侵权必究。具体内容可以加入穿山蜀黍的纯净花园 QQ 群进行讨论。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 实向量 $\vec{a} = (1, m)$, $\vec{b} = (-1, n)$, $p \iff q$ 表示 p 的充分必要条件为 q , 则以下说法错误的是
 - A. $\vec{a} \perp \vec{b} \iff mn = 1$
 - B. $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 为锐角 $\iff mn > 1$
 - C. $\vec{a} // \vec{b} \iff m + n = 0$
 - D. $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{3} \iff (\frac{m+n}{mn-1})^2 = 3$
2. 已知角 $\varphi, \psi \in [0, \pi]$, 满足 $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin \psi = \frac{35}{37}$, 则 $\tan(2\varphi + \psi)$ 的可能取值为
 - A. $\frac{57}{176}$
 - B. $\frac{176}{63}$
 - C. $\frac{104}{153}$
 - D. $\frac{57}{153}$
3. 斗拱是中国建筑特有的一种结构, 具有非常好的装饰性, 图 1 和图 2 是北京故宫太和殿斗拱实物图, 图 3 是斗拱构件之一的“斗”的几何体。图 3 中的斗是由棱台与长方体形凹槽 (长方体去掉一个长相等, 宽和高分别为原长方体的一半的小长方体) 贴合组成。若如图 3 所示的棱台两底面面积分别为 200cm^2 , 450cm^2 , 高为 6cm , 长方体凹槽的外侧高为 8cm , “斗”的密度为 0.50g/cm^3 , 则该“斗”的质量为

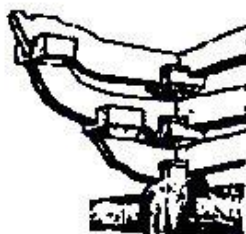


图 1

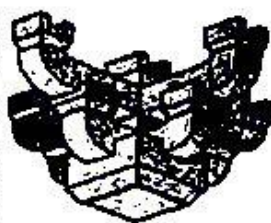


图 2

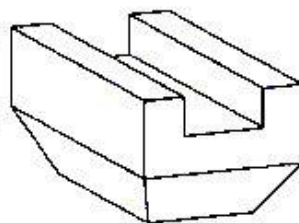
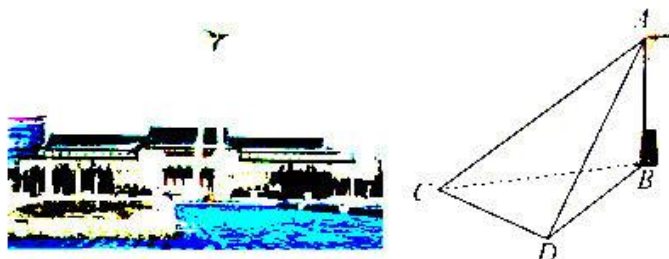


图 3

- A. 2.3kg
- B. 2.75kg
- C. 3.2kg
- D. 3.65kg

4. 文化广场原名地质宫广场，是长春市著名的城市广场，历史上地质宫广场曾被规划为伪满洲国的国都广场，文化广场以新民主大街道中心线至地质宫广场主楼中央为南北主轴，广场的中央是太阳鸟雕塑塔，在地质宫（现为吉林大学地质博物馆）主楼辉映下显得十分壮观，现某兴趣小组准备在文化广场上对中央太阳鸟雕塑塔的高度进行测量，并绘制出测量方案示意图， A 为太阳鸟雕塑最顶端， B 为太阳鸟雕塑塔的基座（即 B 在 A 的正下方），在广场内（与 B 在同一水平面内）选取 C, D 两点，测得 CD 的长为 m ，兴趣小组成员利用测角仪可测得的角有 $\angle ACB, \angle ACD, \angle BCD, \angle ADC, \angle BDC$ ，则根据下列各组中的测量数据，不能计算出太阳鸟雕塑塔高度 AB 的是



- A. $m, \angle ACB, \angle BCD, \angle BDC$ B. $m, \angle ACB, \angle BCD, \angle ACD$
C. $m, \angle ACB, \angle ACD, \angle ADC$ D. $m, \angle ACB, \angle BCD, \angle ADC$
5. Legendre 三平方和定理说的是：任何一个正整数 n 可以表为三个整数的平方和的充要条件为 $n \neq 4^a(8k+7)$ ，其中 $a, k \in \mathbb{N}$ 。从 1 到正整数 N 中随机选定一个正整数，当 N 足够大时，其可以表为三个整数的平方和的概率接近于
- A. $\frac{7}{8}$ B. $\frac{5}{6}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{2}{3}$
6. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x) = a \sin 2x + \sqrt{3}a \cos 2x + 2x$ ，则
- A. $a < 0$ 时， $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减
B. $a \geq \frac{1}{2}$ 时， $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增
C. $a = \frac{1}{2}$ 时， $f(x)$ 在 $[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$ 上的最大值为 $\frac{20\pi - 3\sqrt{3}}{6}$
D. $a \geq \frac{1}{2}$ 时， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值大于等于 $\frac{13\pi - 6}{12}$
7. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足对 $x \geq 0$ ，都有： $f(x) = x^3$ ，若 $\forall x \in [a-2, a+2]$ ，都有 $f(x^2+a) > a^3 f(x)$ ，则 a 的取值范围为
- A. $(\frac{-7-\sqrt{17}}{4}, 0) \cup (0, 4)$ B. $(\frac{-7-\sqrt{17}}{4}, 0) \cup (0, 4)$
C. $(-\infty, 0) \cup (0, 4)$ D. $(\frac{-7-\sqrt{17}}{4}, 0) \cup (0, +\infty)$
8. 已知曲线 $C_n: x^2 - 2nx + y^2 = 0 (n = 1, 2, \dots)$ ，从点 $P(-1, 0)$ 向曲线 C_n 引斜率为 $k_n (> 0)$ 的切线 l_n ，切点为 $P_n(x_n, y_n)$ ，则以下说法中错误的是
- A. 数列 $\{x_n\}$ 的通项公式为 $x_n = \frac{n}{n+1}$ B. 数列 $\frac{y_n^2}{n^4}$ 的前 n 项和为 $\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$
C. $x_2 \cdot x_3 \cdots x_{2n} \leq \sqrt{\frac{x_n}{n}}$ D. $\ln x_n - \ln y_n > \frac{2(x_n - y_n)}{x_n + y_n}$



二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求的。全部选对的得 5 分，部分选择的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 如果增加二项分布试验次数，则其随机变量 X 可近似看作服从正态分布，对应的概率曲线与函数 $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ($x \in \mathbb{R}$) 吻合。若 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，记 $t_{\mu, \sigma}(x) = P(\xi < x) (x \in \mathbb{R})$ ，则
- A. 对任意实数 μ, σ ， $y = t'_{\mu, \sigma}(x) \geq 0 (x \in \mathbb{R})$ 恒成立. 来源：高三答案公众号
- B. 函数 $y = t_{0,1}(x)$ 关于 $(0, \frac{1}{2})$ 对称.
- C. 当 $\mu_1 \geq \mu_2, \sigma_1 \geq \sigma_2 > 0$ 时， $t_{\mu_1, \sigma_1}(\mu_1 + \sigma_1) + t_{\mu_2, \sigma_2}(\mu_2 - \sigma_2) \geq t_{\mu_1, \sigma_1}(\mu_1 - \sigma_1) + t_{\mu_2, \sigma_2}(\mu_2 + \sigma_2)$ ，取等当且仅当 $\mu_1 = \mu_2, \sigma_1 = \sigma_2$.
- D. 当 $\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0$ 时， $t_{\mu, \sigma_1}(\mu + \sigma_2) + t_{\mu, \sigma_2}(\mu - \sigma_2) \geq t_{\mu, \sigma_1}(\mu - \sigma_2) + t_{\mu, \sigma_2}(\mu + \sigma_2)$ ，取等当且仅当 $\sigma_1 = \sigma_2$.
10. 已知抛物线 $C: y^2 = x$ 的焦点为 F ，准线交 x 轴于点 D ，过点 F 作倾斜角为 θ (θ 为锐角) 的直线交抛物线于 A, B 两点 (其中点 A 在第一象限)。将平面 ADF 沿 x 轴折起，使面 $ADF \perp$ 面 BDF ，则
- A. 折叠前 $\triangle ABD$ 面积最大值为 $\frac{1}{4}$
- B. 折叠前 DF 平分 $\angle ADB$
- C. 折叠后三棱锥 $B-ADF$ 的体积恒为 $\frac{1}{48}$
- D. 折叠后 AD, BF 所成角随 θ 增大而增大
11. 一个函数的我们可以在给定的定义域下进行运算。考虑定义在 $\mathbb{C}$ 上的函数，我们仍然可以对其进行求导操作，也就是说，我们沿着任一个方向趋近 z_0 的所得到的值都存在且相等，用公式表达，即为

$$f'(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

对 $z = f(x, y)$ 定义 f 关于 x 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 为 f 在 x 方向的导数，且 $\sqrt{z}$ 为满足 $(\sqrt{z})^2 = z$ 的一个解，则

- A. $f(z) = z^2$ 在 $\mathbb{C}$ 上处处可导
- B. $f(z) = \sqrt{z}$ 在 $\mathbb{C}$ 上处处可导
- C. $f(z) = \Re z$ 在 $\mathbb{C}$ 上处处不可导
- D. 若 $f'(z)$ 存在，则 $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0$
12. 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=5, BC=2\sqrt{13}, CD=11, DA=8, AA_1=3$ ，直三棱柱 $EFG-E_1F_1G_1$ 中， $EF=5, FG=7, GE=8, EE_1=3$ ，现将三棱柱的某个面与四棱柱的某个面重合，使得得到的几何体的面数最少，得到几何体 V' 。在直四棱柱的一点 P ，其的投影为得到的几何体的表面积最大的矩形面的中心 O ，且满足 $PO = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，在矩形面的边界上任一点 R 和其关于中心 O 的对径点 R' ，以 RR' 为长轴， P 为一个短轴顶点作半椭圆，得到几何体 V'' 。若已知 $\angle BAD = \frac{2\pi}{3}$ ，设 V' 的对角线和棱中最长与次长者所在直线夹角为 θ ，则
- A. 四边形 $ABCD$ 无内切圆
- B. V' 的表面积可能为 $102 + 12\sqrt{3} + 6\sqrt{13}$
- C. $\tan \theta$ 可能为 $\frac{\sqrt{3}}{8}$
- D. V'' 的体积可能为 $119\sqrt{3}$



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ ，其中 $\{a_n\}$ 等差数列，且满足 $a_1 = 1, a_2 = 2$ ，且有 $a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 = \frac{3^{n+2} - 9 - 6n}{4}$ 。记 $v_2(n)$ 为 n 中含 2 的幂次，则 $v_2(b_n - 1)$ 的前 2023 项和为 。
14. 实系数四次函数 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 8$ 有因式 $x^2 - 4x + 2$ ，记 A 的所有整数根和实数根分别构成集合 $A, B, C = \{x | x^2 - ax = 0\}$ ，记 $A * B = \begin{cases} \#A - \#B & \#A \geq \#B \\ \#B - \#A & \#B > \#A \end{cases}$ ，其中 $\#A$ 表示 A 的元素个数，则 X 分别为 A, B 时，若 $X * C = 1$ ， a 的取值范围分别为 。
15. 双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 ， C 上任取一非顶点的点 P ， PF_1, PF_2 另交 C 于 A, B ，连接 AF_2, BF_1 交于点 Q ，随着点 P 运动，点 Q 的轨迹方程 T 为 ，第一象限的点 M 在 T 上， $D_1(-1, 0), D_2(1, 0)$ ， $\angle D_1 M D_2$ 的角平分线过 $(0, -2)$ ，则 $\triangle D_1 M D_2$ 的面积为 。
16. 在某个星系有 2023 个星球，且星球中不存在三颗星球共线。星球之间通过宇宙飞船经过直线航路式连接两地。已知任何两个星球都可以经过有限次乘坐宇宙飞船通航，交通运输部门为保证减少航路占用，禁止所有航路中存在三角形，而宇宙飞船公司为降低成本，要利用尽可能少的航路通航。同时，宇宙飞船公司为了保证通行效率，故不恰好连接，且需要让所有的航路中再增加一条航路就出现三角形，则宇宙飞船公司最少需要选定通航的航路数为 。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或者演算步骤。

17. (10 分)

直四棱柱 $ABCD - A_1 B_1 C_1 D_1$ 中，四边形 $ABCD$ 为平行四边形， $\angle DAB = \frac{\pi}{3}$ ， $A_1 D_1 = AA_1 = 2$ ， $A_1 B_1 = 1$ ， M, N 为 $C_1 D, B_1 C$ 上的动点。

- (1) M, N 分别为 $C_1 D, B_1 C$ 中点时，证明： $MN \parallel$ 平面 $BDD_1 B_1$ ；
- (2) 求 D 到面 $A_1 D_1 N$ 的距离的取值范围。

18. (12 分)

设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 分别对应边 a, b, c ，若 $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos 2C = 0$ 。

- (1) 求 $\frac{\sin C}{\sin A \sin B}$ 的最小值；
- (2) 若 $A \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ ，且 $AB = 6$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积取值范围。

19. (12 分)

平面 $\mathbb{R}^2$ 上有 n 个红点、 n 个蓝点、 n 个黄点，这 $3n$ 个点两两不同且不重合。

- (1) 对颜色不同的任两点之间连接一条线段，颜色相同的两点之间不连接线段，则求连接线段条数的最大可能值；
- (2) 若 $3n$ 个点中任三点不共线，此时将所有互异的点之间连线，并给线段端点颜色相同的线段赋值 1，端点不同的线段赋值 2。
① 当 $n = 4$ 时，在所有线段中任取一条线段，按两个端点的颜色进行分类（端点无序），讨论分类 X 的分布列及数学期望；

②对任意的正整数 n ，在所有线段中取三条构成三角形的线段，记该三角形的三边的赋值之和的数学期望为 E_n ，证明：对 $n \geq 4$ ，有：

$$\sum_{i=1}^n \frac{6}{E_n - 3} < 3n - c \ln \frac{\pi^2}{6}$$

20. (12 分)

已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x) = ae^{-x} + \frac{\ln x}{x}$ ，

(1) 当 $a > 0$ 时，

①证明： $f(x)$ 在 $(0, c)$ 上有唯一零点 x_0 和唯一极值点 x' ；

②证明：若 $0 < a < 1$ ，则有：

$$\ln x' < x_0^2 - x_0 + 1$$

(2) 当 $a = 0$ 时，设 $f(x) = m$ 有两根，分别为 x_1, x_2 ，已知 $x_2 > 3x_1$ ，若实数 p 使得不等式

$$2x_1 + \frac{2p}{m} \ln x_2 > (3p + 1) \ln 3$$

恒成立，求 p 的取值范围。

21. (12 分)

已知整数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 分别为等差数列和等比数列， $a_1 = b_1 = 2$ ，且满足不等式 $c_1 \leq \frac{a_n}{b_n} \leq c_2$ 的 c_1 的最大值为 0， c_2 的最小值为 $\frac{5}{4}$ 。若存在正整数 $k \neq l$ ，使得 $\frac{a_k}{a_l} = \frac{b_k}{b_l}$ ，

(1) 求 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 记 $A_n = \{m | m = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i b_i, i = 1, 2, \dots, a_n, \varepsilon_i \in \{-1, 1\}\}$ ，若 $A_n = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ ，则求

$$\sum_{x \in A} (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)$$

的值；

(3) 直接写出最佳常数 C ，使得不等式

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i b_i} < C$$

恒成立，不需证明。

22. (12 分)

椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，椭圆的两条相互垂直的切线交于点 P ，随切线运动点 P 的轨迹曲线为 F ，

(1) 求 F 的轨迹方程；

(2) 设 C 的一条切线与 C 切于点 S ，交 F 于 A, B ，过 S 的垂线另交 C 于 T ，求 $\frac{|ST|}{|AB|}$ 的取值范围；

(3) 在第二问的基础上，求 $\triangle AST$ 面积的最大值。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线