2024届10月质量监测考试

理科数学参考答案

1. B　解析：$z=3-2a+(a+6)i$，由题意得：$3-2a=0\Rightarrow a=\frac{3}{2}$.

2. C　解析：$\vec{c}-\vec{b}=(2m-2,\ m-2)$，$\vec{a}/\!/(\vec{c}-\vec{b})\Rightarrow 1\times(m-2)=2(2m-2)\Rightarrow m=\frac{2}{3}$.

3. A　解析：$\complement_I N=\{1,\ 2\}$，故$(\complement_I N)\cap M=\{1,\ 2\}$.

4. C　解析：$a=3^{-\frac{1}{3}}<3^{\frac{1}{5}}=b$，$c=\log_3\frac{1}{5}<\log_3 1=0$，$\therefore\ c<a<b$.

5. D　解析：$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=2\cdot2\cdot\cos120^\circ+\frac{2}{3}\cdot2=-\frac{2}{3}$.

6. D　解析：$\tan\theta=\frac{\cos2}{\sin2}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-2)}{\cos(\frac{\pi}{2}-2)}=\tan(\frac{\pi}{2}-2)$，故$\theta=\frac{\pi}{2}-2+k\pi$，又$\sin2>0$，$\cos2<0$，故$\theta$在第四象限，故$\theta=\frac{5\pi}{2}-2$.

7. C　解析：设切点横坐标为x_0，所做切线斜率为k，则$k=f'(x_0)=1-\frac{a}{x_0}$，当$a\leqslant0$时，$k=1-\frac{a}{x_0}>0$，故不存在$k_1k_2=-1$；当$a>0$时，满足：$\begin{cases}1-a<0\\1-\frac{a}{6}>0\\(1-a)(1-\frac{a}{6})<-1\end{cases}\Rightarrow3<a<4$.

8. D　解析：$x\in(0,\frac{\pi}{2})\Rightarrow x+\frac{\pi}{12}\in(\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12})$，故$\sin(x+\frac{\pi}{12})=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{3})=2\sin[(x+\frac{\pi}{12})+\frac{\pi}{4}]=\sqrt{2}[\sin(x+\frac{\pi}{12})+\cos(x+\frac{\pi}{12})]=\sqrt{2}(\frac{7\sqrt{2}}{10}+\frac{\sqrt{2}}{10})=\frac{8}{5}$.

9. C　解析：A：$a+b>a+\frac{1}{a}>2$，故A正确；B：$a>\frac{1}{a}\Rightarrow a^2>1\Rightarrow a>1$，B正确；C：取$a=3$，$b=\frac{1}{2}$显然满足条件，故C错误；D：$(a-b)+\frac{b-a}{ab}=(a-b)(1-\frac{1}{ab})$，$\because\ a>b$，$\therefore\ a-b>0$，$b>\frac{1}{a}\Rightarrow ab>1$，$\frac{1}{ab}<1\Rightarrow1-\frac{1}{ab}>0$，故D正确.

10. A　解析：条件p等价于$a-1>1\Rightarrow a>2$；条件q等价于$2<a<3$；故：p是q的必要不充分条件；

11. C　解析：(1)$\Delta=(b-2)^2-4b>0$,故（1）正确；
（2）$f(x)-ax=x^2+(b-a-2)x+b\Rightarrow\Delta=(b-a-2)^2-4b>0$，故（2）错误
（3）$f(x)-x=x^2+(b-3)x+b$，$x_1+x_2=3-b>3$，故（3）正确；
（4）$y=f(x)-x$的两个零点是x_1、$x_2\Rightarrow f(x_1)=x_1\Rightarrow f(f(x_1))=f(x_1)\Rightarrow x_1\Rightarrow f(f(x_1))-x_1=0$，故$x_1$是$f(f(x))-x$的零点，同理，$x_2$也是$f(f(x))-x$的零点；（4）正确.
故选C.

12. D　**解析**：可行域如图中阴影部分，$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$的几何意义是：可行域中的点与点$(2,2)$的距离，最小值为$(2,2)$到直线$x+2y-4=0$的距离$\frac{2}{\sqrt{5}}$，故$(x-2)^2+(y-2)^2$最小值为$\frac{4}{5}$，经检验成立.

13. $0<x<4$　**解析**：$\log_4 x=\frac{\log_4 x}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2 x$，故原不等式化为$\frac{3}{2}\log_2 x<3\Rightarrow 0<x<4$.

14. 2　**解析**：$\log_a b+\log_b(a^2+12)=\log_a b+\frac{\log_a(a^2+12)}{\log_a b}\geqslant 2\sqrt{\log_a b\cdot\frac{\log_a(a^2+12)}{\log_a b}}$
$=2\sqrt{\log_a(a^2+12)}$，$\therefore 2\sqrt{\log_a(a^2+12)}=4\Rightarrow a^4-a^2-12=0\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=2$.

15. $\frac{1}{4}$　**解析**：$g(x)=f(x+\frac{1}{6})\Rightarrow g(x+\frac{1}{3})=f(\frac{1}{2}+x)$，$\therefore f(\frac{1}{2}+x)=f(\frac{1}{2}-x)=-f(x-\frac{1}{2})$，
令$x-\frac{1}{2}=t$，则$x=t+\frac{1}{2}\Rightarrow f(t+1)=-f(t)$，故$f(\log_2 5)=-f(\log_2 5-1)$
$=f(\log_2 5-2)=f(\log_2\frac{5}{4})$，$\because \frac{5}{4}<2^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\log_2\frac{5}{4}<\frac{1}{2}$，$\therefore f(\log_2\frac{5}{4})=2^{\log_2\frac{5}{4}}-1=\frac{1}{4}$.
由$g\left(x+\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{2}-x\right)\Rightarrow g\left(\frac{5}{6}\right)=g\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=f(0)=0$，故原式$=\frac{1}{4}$.

16. $\log_{17}626$，$\log_2 5$，$\frac{5}{2}$　**解析**：由结论得：$\log_{17}626<\log_{16}625=\log_2 5$，又$2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{32}>\sqrt{25}=5$，故从小到大的次序是：$\log_{17}626$，$\log_2 5$，$\frac{5}{2}$.

17. 解：(1) $f(x)=2\sin x(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)=\sin x\cos x-\sqrt{3}\sin^2 x=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos 2x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故周期$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，最大值为$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ……………………………… 4分
(2) $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}=0\Rightarrow\sin(2x+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$，故$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$或$\frac{2\pi}{3}+2k\pi\Rightarrow x=k\pi$或$\frac{\pi}{6}+k\pi$满足条件的解有3个：$\pi$、$\frac{\pi}{6}$、$\frac{7\pi}{6}$，和为$\frac{7\pi}{3}$ ………………………… 10分

18. 解：(1) $f(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln x$
$f'(x)=\frac{(x+\frac{1}{2})(x-1)}{x}$.
$\because x>0$，$f'(x)=0$时，$x=1$
在区间$(0,1)$上单调递减；
在区间$(1,+\infty)$上单调递增，故$f(x)$最小值为$f(1)=0$. ……………………………… 4分
(2) $f'(x)=\frac{(x-a)(x-1)}{x}$，$a\leqslant 0$时，$(0,1)$上，$f(x)$递减，$(1,+\infty)$上，$f(x)$递增.
$0<a<1$时，$(0,a)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$为单调递增；$(a,1)$上，$f'(x)<0$，$f(x)$为单调递减；$(1,+\infty)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$为单调递增.
$a=1$时，$f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x}\geqslant 0$，$(0,+\infty)$上，$f(x)$为单调递增.
$a>1$时，$(0,1)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$为单调递增；$(1,a)$上，$f'(x)<0$，$f(x)$为单调递减；$(a,+\infty)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$为单调递增. ……………………………… 12分

19. 解：（1）$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=20\Rightarrow bc\cos A=20$，$S_{\triangle ABC}=10\sqrt{3}\Rightarrow\frac{1}{2}bc\sin A=10\sqrt{3}$，

两式相除得：$\tan A=\sqrt{3}\Rightarrow\angle A=60°$. ………………………………………………………… 4分

（2）$\because O$为外心，故$\angle BOC=2\angle A=120°$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\left|\overrightarrow{OB}\right|^2\times(-\frac{1}{2})=-\frac{49}{6}\Rightarrow\left|\overrightarrow{OB}\right|=\frac{7}{\sqrt{3}}$.

由正弦定理可知：$\frac{a}{\sin A}=2R=\frac{14}{\sqrt{3}}\Rightarrow a=7$. ……………………………………………… 12分

20. 解：（1）设$c=\sqrt{3}k$，$AD=2k$，$b=2\sqrt{3}k$，

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}$，

$\therefore\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}|AD|\cdot c\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}|AD|\cdot b\sin\frac{A}{2}$

$\sqrt{3}\sin\frac{A}{2}=\sin A$

$\sqrt{3}\sin\frac{A}{2}=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

$\therefore\cos\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{A}{2}\in(0,\ \frac{\pi}{2})$，

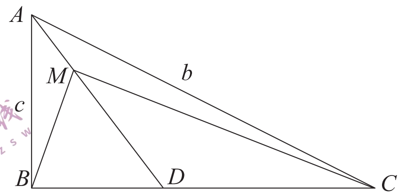
$\therefore\frac{A}{2}=\frac{\pi}{6}$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………………………………… 5分

（2）由（1）知：$\angle BAD=30°$，

ΔBAD中，$BD^2=3k^2+4k^2-2\cdot\sqrt{3}k\cdot 2k\cdot\cos 30°=k^2$

$\Rightarrow BD=k$，$DC=2k$，故得：$\angle ABC=90°$，$\angle C=30°$，

设$\angle ABM=\theta$，ΔABM中，



$\frac{AM}{\sin\theta}=\frac{AB}{\sin(150°-\theta)}=\frac{\sqrt{3}k}{\sin(150°-\theta)}$，

ΔACM中，$\frac{AM}{\sin(30°-\theta)}=\frac{AC}{\sin(120°+\theta)}=\frac{2\sqrt{3}k}{\sin(120°+\theta)}$，

…………………………………………………………………………………………………… 7分

两式相除得：$\frac{\sin(30°-\theta)}{\sin\theta}=\frac{\sin(120°+\theta)}{2\sin(150°-\theta)}=\frac{\sin(120°+\theta)}{2\sin(30°+\theta)}$ ……………………………… 9分

$2(\frac{1}{4}\cos^2\theta-\frac{3}{4}\sin^2\theta)=\sin\theta(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta)\Rightarrow 2\tan^2\theta+\sqrt{3}\tan\theta-1=0\Rightarrow\tan\theta=$ $\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{11}}{4}$，

$\because\ \theta$为锐角，故$\tan\theta=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{11}}{4}$. ……………………………………………………… 12分

21. 解：（1）将$(2,\frac{5}{2})$代入$f(x)$解析式得：$2a+\frac{b}{2}=\frac{5}{2}$，$ax+\frac{b}{x}\geqslant 2\sqrt{ab}=\sqrt{6}\Rightarrow ab=\frac{3}{2}$，两式联立解得：$\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=3\end{cases}$或$\begin{cases}a=\frac{3}{4}\\ b=2\end{cases}$，由$b<4a$得：$a=\frac{3}{4}$，$b=2$. …………………………………… 4分

（2）设$M(x_0,\ y_0)$，则$y_0=\frac{3}{4}x_0+\frac{2}{x_0}$，

$\left|MQ\right|^2=(x_0-2)^2+(y_0-4)^2=(x_0-2)^2+(\frac{3}{4}x_0+\frac{2}{x_0}-4)^2=\frac{25}{16}x_0^2+\frac{4}{x_0^2}-10x_0-\frac{16}{x_0}+23$

$=(\frac{5}{4}x_0+\frac{2}{x_0})^2-8(\frac{5}{4}x_0+\frac{2}{x_0})+18=(\frac{5}{4}x_0+\frac{2}{x_0}-4)^2+2\geqslant 2$，故$|MQ|$的最小值为$\sqrt{2}$，

仅当$\frac{5}{4}x_0+\frac{2}{x_0}-4=0$，即$x_0=\frac{8\pm 2\sqrt{6}}{5}$时取等.…………………………………………………… 12分

22.解：（1）$f(x)=e^{x-2\ln x}+(x-2\ln x)+m$，

令$x-2\ln x=t$，$f(x)=g(t)=e^t+t+m$，$g'(t)=e^t+1>0$，故$g(t)$为增函数，

由$t=x-2\ln x=h(x)$得：$h'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}\Rightarrow h(x)\geqslant h(2)=2-2\ln 2$，

故$t\in[2-2\ln 2,\ +\infty)$，$g(t)$值域为$[\frac{e^2}{4}+2-2\ln 2+m,\ +\infty)$，

$\therefore \frac{e^2}{4}+2-2\ln 2+m<0\Rightarrow m<2\ln 2-2-\frac{e^2}{4}$. …………………………………………………… 4分

（2）x_1，x_2是方程$x-2\ln x=t$的两解，

$x_1-2\ln x_1=t$，$x_2-2\ln x_2=t\Rightarrow(x_1-x_2)-2(\ln x_1-\ln x_2)=0\Rightarrow\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=\frac{1}{2}$，

要证：$x_1+x_2>4$，只须证：$\frac{2}{x_1+x_2}<\frac{1}{2}=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，

即证：$\ln\frac{x_2}{x_1}>\frac{2(x_2-x_1)}{x_2+x_1}=\frac{2(\frac{x_2}{x_1}-1)}{\frac{x_2}{x_1}+1}$，令$\frac{x_2}{x_1}=s(s>1)$， …………………………………… 8分

即证：$\ln s>\frac{2(s-1)}{s+1}\ (s>1)$，令$p(s)=\ln s-\frac{2(s-1)}{s+1}\ (s>1)$，

$p'(s)=\frac{1}{s}-\frac{4}{(s+1)^2}=\frac{(s-1)^2}{s(s+1)^2}>0$，故$p(s)$为增函数，$\Rightarrow p(s)>p(1)=0$，

故原命题得证. ……………………………………………………………………………………………… 12分