乐山市高中 2024 届期末教学质量检测

理科数学参考答案及评分意见

2023.7

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

1. C　2. B　3. A　4. C　5. C

6. B　7. A　8. D　9. C　10. B

11. D　12. C

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. -0.25；　14. 30；

15. $\frac{5}{3}\pi$；　16. 4.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.

17. 解：（1）$\because f(x)=\frac{1}{3}x^3-x-6$，$\therefore f'(x)=x^2-1$，　……………………1 分

$\therefore x=3$ 时，$f'(3)=8$，$f(3)=0$.　……………………3 分

$\therefore$切线方程为：$y-0=8(x-3)$，即：$8x-y-24=0$.　……………………5 分

（2）令 $f'(x)>0$，解得 $x<-1$ 或 $x>1$.　……………………7 分

令 $f'(x)<0$，解得 $-1<x<1$.　……………………8 分

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(-\infty,-1)$ 单调递增，在 $(-1,1)$ 单调递减.　……………………10 分

18. 解：（1）$\because \sum_{i=1}^{7}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=28$，$\sum_{i=1}^{7}\left(y_i-\overline{y}\right)^2=118$，$\sum_{i=1}^{7}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)=56$，

$$\therefore r=\frac{\sum_{i=1}^{7}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{7}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}=\frac{56}{\sqrt{28\times118}}=\frac{56}{2\sqrt{826}}\approx\frac{56}{57.4}\approx 0.98,$$

……………………4 分

$\therefore$两变量之间具有较强的线性相关关系，

故市场占有率 y 与月份代码 x 之间的关系可用线性回归模型拟合.　……………………5 分

（2）$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{7}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=\frac{56}{28}=2$，　……………………7 分

又 $\overline{x}=\frac{1}{7}\times\left(1+2+3+4+5+6+7\right)=4$，$\overline{y}=\frac{1}{7}\times\left(11+13+16+15+20+21+23\right)=17$，

$\therefore \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=17-2\times4=9$，　……………………9 分

故 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=2x+9$，　……………………10 分

当 $x=10$ 时，$\hat{y}=2\times10+9=29$，

$\therefore$预测该公司 10 月份的市场占有率为 29%.　……………………12 分

19. 解：（1）$\because f(x)=x\cdot e^x$，$\therefore f'(x)=(1+x)e^x$，　……………………1 分

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-1$.　……………………2 分

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 单调递增. ……………………4 分

$\therefore$当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 有极小值 $-\dfrac{1}{e}$. ……………………6 分

（2）$\because x\to-\infty$ 时，$f(x)\to 0$，

$\therefore$①当 $a<-\dfrac{1}{e}$ 时，方程无解； ……………………8 分

②当 $a=-\dfrac{1}{e}$ 或 $a\geqslant 0$ 时，方程有一个解； ……………………10 分

③当 $-\dfrac{1}{e}<a<0$ 时，方程有两个解. ……………………12 分

20. 解：（1）$\because \left(0.0025+0.005+0.0175+m+0.01\right)\times 20=1$， ……………………1 分

$\therefore m=0.015$. ……………………2 分

（2）数学成绩优秀的有 $100\times 50\%=50$ 人，不优秀的人 $100\times 50\%=50$ 人，

经常整理错题的有 $100\times\left(40\%+20\%\right)=60$ 人，不经常整理错题的是 $100-60=40$ 人，

经常整理错题且成绩优秀的有 $50\times 70\%=35$ 人. ……………………3 分

	数学成绩优秀	数学成绩不优秀	合计
经常整理	35	25	60
不经常整理	15	25	40
合计	50	50	100

……………………4 分

$\therefore K^2=\dfrac{100(35\times 25-15\times 25)^2}{50\times 50\times 60\times 40}=\dfrac{25}{6}>3.841$， ……………………5 分

即有 95% 的把握认为数学成绩优秀与经常整理数学错题有关联. ……………………6 分

（3）在“经常整理错题”抽到数学成绩优秀的学生概率为 $\dfrac{7}{12}$. ……………………7 分

又 X= $0,1,2$

则 $P(X=0)=C_2^0(\dfrac{5}{12})^2=\dfrac{25}{144}$， ……………………8 分

$P(X=1)=C_2^1\dfrac{7}{12}\cdot\dfrac{5}{12}=\dfrac{35}{72}$， ……………………9 分

$P(X=2)=C_2^2(\dfrac{7}{12})^2=\dfrac{49}{144}$. ……………………10 分

则 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\dfrac{25}{144}$	$\dfrac{35}{72}$	$\dfrac{49}{144}$

……………………11 分

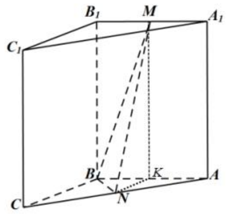
$\therefore E(X)=0\times\dfrac{25}{144}+1\times\dfrac{35}{72}+2\times\dfrac{49}{144}=\dfrac{7}{6}$. ……………………12 分

21. 证明：（1）取 AB 的中点为 K，连接 MK,NK，

$\because$三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，$\therefore$四边形 ABB_1A_1 为平行四边形，

$\because B_1M=MA_1, BK=KA$，

$\therefore MK // BB_1$.



又 $MK \not\subset$ 平面 BCC_1B_1， $BB_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1，

$\therefore MK //$ 平面 BCC_1B_1. ……………………2 分

$\because N,K$ 分别为 AC,AB 中点，

$\therefore NK // BC$.

又 $NK \not\subset$ 平面 BCC_1B_1， $BC \subset$ 平面 BCC_1B_1，

$\therefore NK //$ 平面 BCC_1B_1. ……………………4 分

$\because NK \cap MK = K, NK, MK \subset$ 平面 MKN，

$\therefore$ 平面 $MKN //$ 平面 BCC_1B_1. ……………………5 分

又 $MN \subset$ 平面 MKN，

$\therefore MN //$ 平面 BCC_1B_1. ……………………6 分

（2）选条件①

$\because BN \perp$ 平面 AA_1C_1C，

$\therefore BN \perp CC_1$.

又$\because$侧面 BCC_1B_1 为正方形，

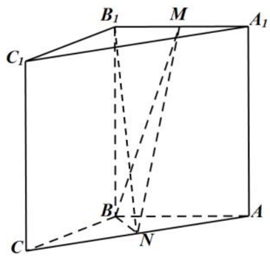
$\therefore CC_1 \perp BC$.

$\because BC \cap BN = B$，

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC. ……………………8 分

选条件②

$\because$ 在 ΔB_1BN 中， $BB_1 = 2, BN = 1, B_1N = \sqrt{5}$，



$\therefore BB_1{}^2 + BN^2 = B_1N^2$.

$\therefore BB_1 \perp BN$.

又$\because$侧面 BCC_1B_1 为正方形，

$\therefore BB_1 \perp BC$.

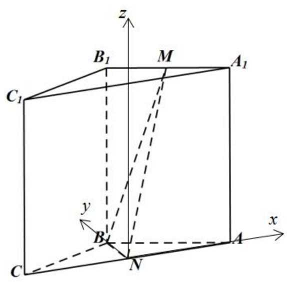
$\because BC \cap BN = B$，

$\therefore BB_1 \perp$ 平面 ABC. ……………………8 分

解法一：如图建立空间直角坐标系，

设 $AB = 2$，则 $A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,1,0)$，$N(0,0,0)$，$M(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},2)$

$\overrightarrow{NB} = (0,1,0)$，$\overrightarrow{NM} = (\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},2)$



设平面 NBM 的法向量为 $\vec{m} = (x,y,z)$

$$\begin{cases} \vec{m}\cdot\overrightarrow{NB} = y = 0 \\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{NM} = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 2z = 0 \end{cases}$$

令 $x = 2$ 得 $y = 0, z = -\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\vec{m} = (2,0,-\frac{\sqrt{3}}{2})$. ……………………9 分

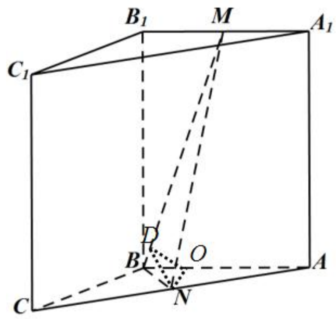
同理可得平面 ABM 的法向量为 $\vec{n} = (1,\sqrt{3},0)$ ……………………10 分

$\therefore \cos<\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}>=\dfrac{2}{\dfrac{\sqrt{19}}{2}\times 2}=\dfrac{2\sqrt{19}}{19}$.

即二面角 $A-BM-N$ 的平面角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{19}}{19}$. ……………………12 分

解法二：过点 N 作 $NO\perp AB$ 交 AB 于点 O，

过点 O 作 $OD\perp BM$ 交 BM 于点 D，连结 DN



$\because BB_1\perp$ 平面 ABC，

$\therefore BB_1\perp NO$.

$\because BB_1\cap AB=B$，

$\therefore NO\perp$ 平面 ABB_1A_1.

$\therefore NO\perp BM$.

$\because OD\cap NO=O$，

$\therefore BM\perp$ 平面 NOD.

$\therefore BM\perp ND$.

$\therefore \angle NDO$ 即为所求角. ……………………10 分

$\because NO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$ND=\dfrac{\sqrt{19}}{2\sqrt{5}}$，$OD=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，

$\therefore \cos\angle NDO=\dfrac{OD}{ND}=\dfrac{2\sqrt{19}}{19}$.

即二面角 $A-BM-N$ 的平面角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{19}}{19}$. ……………………12 分

22.**解**：（1）$\because f(x)=\mathrm{e}^x-ax$，$\therefore f'(x)=\mathrm{e}^x-a$. ……………………1 分

$\because f(x)$ 有最小值，$\therefore a>0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 单调递增.

$\therefore f(x)_{\min}=f(\ln a)=a-a\ln a$. ……………………2 分

$\because g(x)=ax-\ln x$，$\therefore g'(x)=\dfrac{ax-1}{x}$.

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty,\dfrac{1}{a})$ 单调递减，在 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 单调递增.

$\therefore g(x)_{\min}=g(\dfrac{1}{a})=1+\ln a$. ……………………3 分

$\because f(x)_{\min}=g(x)_{\min}$，

$\therefore a-a\ln a=1+\ln a$，即 $\dfrac{a-1}{1+a}=\ln a$. ……………………4 分

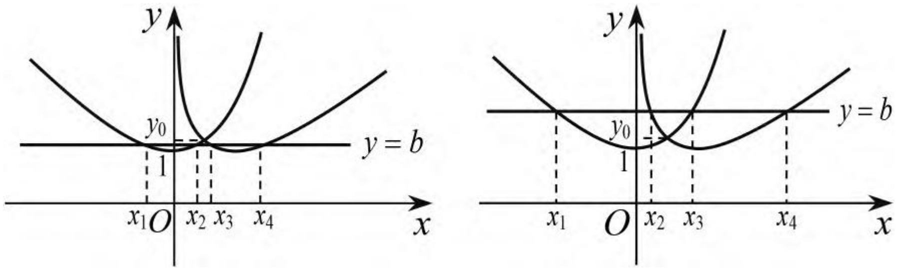
令 $h(a)=\dfrac{a-1}{1+a}-\ln a$，

$\therefore h'(a)=\dfrac{2}{(1+a)^2}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{-a^2-1}{a(1+a)^2}\leqslant 0$.

$\therefore h(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减. ……………………5 分

又∵ $h(1)=0$，∴ $a=1$. ……………………6 分

（2）直线 $y=b$ 与 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图象有四个不同的交点，存在以下两种情况：



由于两种情况证法类似，下证第一种情况：

设直线 $y=b$ 与 $y=f(x)$ 的图象交点横坐标从左到右依次为 x_1,x_2，

直线 $y=b$ 与 $y=g(x)$ 的图象交点横坐标从左到右依次为 x_3,x_4.

$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=g\left(x_3\right)=g\left(x_4\right)=b$ 且 $x_1<0<x_2<x_3<1<x_4$. ……………………7 分

∵ $f(\ln x_3)=x_3-\ln x_3=g\left(x_3\right)=f\left(x_1\right)$ 且 $\ln x_3<0$. ……………………8 分

∴ $\ln x_3=x_1$. ……………………9 分

同理，$\ln x_4=x_2$. ……………………10 分

∴ $x_1+x_4=\ln x_3+x_4$， $x_2+x_3=\ln x_4+x_3$

又∵ $g\left(x_3\right)=g\left(x_4\right)$，即：$x_3-\ln x_3=x_4-\ln x_4$. ……………………11 分

∴ $\ln x_3+x_4=\ln x_4+x_3$.

∴ $x_1+x_4=x_2+x_3$. ……………………12 分

（注：未说明有两种情况，扣 1 分）