南京市 2022 届高三年级零模考前复习卷

数学

2021.08

第 I 卷（选择题　共 60 分）

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每题 5 分，共 40 分）

1. 已知复数 $z=1+i$，设复数 $w=\dfrac{2\overline{z}}{z^2}$，则 w 的虚部是（　　）

A. -1　　B. 1　　C. i　　D. $-i$

2. 已知 a，b 为非零实数，则“$a<b$”是“$\dfrac{a}{|b|}<\dfrac{b}{|a|}$”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 既不充分也不必要条件　　D. 充要条件

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{OD}$，则 $\lambda=$（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E,F,G 分别为棱 AB,CC_1,C_1D_1 的中点，则过 E,F,G 三点的平面截正方体所得截面面积为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$　　C. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$　　D. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2$

5. 若 θ 为锐角，$\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，则 $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=$（　　）

A. $\dfrac{12}{25}$　　B. $\dfrac{25}{12}$　　C. $\dfrac{24}{7}$　　D. $\dfrac{7}{24}$

6. 将正整数 12 分解成两个正整数的乘积有 $1\times12,2\times6,3\times4$ 三种，其中 3×4 是这三种分解中两数差的绝对值最小的，我们称 3×4 为 12 的最佳分解．当 $p\times q\left(p,q\in\mathrm{N}^*\right)$ 是正整数 n 的最佳分解时，我们定义函数 $f(n)=|p-q|$，例如 $f(12)=|4-3|=1$，则 $\sum\limits_{i=1}^{2021}f\left(2^i\right)=$（　　）

A. $2^{1011}-1$　　B. 2^{1011}　　C. $2^{1010}-1$　　D. 2^{1010}

7．过点 M（p，0）作倾斜角为150°的直线与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 交于两点 A，B，若 $|AB|=2\sqrt{10}$，则 $|AM|\cdot|BM|$ 的值为（　　）

A．4　　B．$4\sqrt{2}$　　C．$2\sqrt{10}$　　D．$4\sqrt{5}$

8．已知 $a>1,b>1$，且 $\dfrac{e^a}{a}=\dfrac{e^{b+1}+1}{b+1}$，则下列结论一定正确的是（　　）

A．$\ln(a+b)>2$　　B．$\ln(a-b)>0$

C．$2^{a+1}<2^b$　　D．$2^a+2^b<2^3$

二、多项选择题（本大题共4小题，每题5分，共20分.每题全选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分）

9．已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi),(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 图象的一条对称轴为 $x=\dfrac{2\pi}{3}$，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$，且 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 内单调递减，则以下说法正确的是（　　）

A．$\left(-\dfrac{7\pi}{12},0\right)$ 是其中一个对称中心　　B．$\omega=\dfrac{14}{5}$

C．$f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{5\pi}{12},0\right)$ 单增　　D．$f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$

10．在 $\triangle ABC$ 中，角A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $C=\dfrac{\pi}{2}$，将 $\triangle ABC$ 分别绕边 a，b，c 所在的直线旋转一周，形成的几何体的体积分别记为 V_a，V_b，V_c，侧面积分别记为 S_a，S_b，S_c，则（　　）

A．$V_a+V_b\geq 2V_c$　　B．$S_a+S_b\geq 2S_c$

C．$\dfrac{1}{V_a^2}+\dfrac{1}{V_b^2}=\dfrac{1}{V_c^2}$　　D．$\dfrac{1}{S_a^2}+\dfrac{1}{S_b^2}=\dfrac{1}{S_c^2}$

11．设集合 S，T，$S\subseteq\mathrm{N}^*$，$T\subseteq\mathrm{N}^*$，S，T 中至少有两个元素，且 S，T 满足：

①对于任意 x，$y\in S$，若 $x\neq y$，都有 $xy\in T$

②对于任意 x，$y\in T$，若 $x<y$，则 $\dfrac{y}{x}\in S$；

下列情况中可能出现的有（　　）

A．S 有4个元素，$S\cup T$ 有7个元素　　B．S 有4个元素，$S\cup T$ 有6个元素

C．S 有3个元素，$S\cup T$ 有5个元素　　D．S 有3个元素，$S\cup T$ 有4个元素

12．甲、乙两人进行围棋比赛，共比赛$2n\left(n\in N^{*}\right)$局，且每局甲获胜的概率和乙获胜的概率均为$\frac{1}{2}$.如果某人获胜的局数多于另一人，则此人赢得比赛.记甲赢得比赛的概率为$P(n)$，则（　　）

A．$P(2)=\frac{1}{8}$　　　　B．$P(3)=\frac{11}{32}$

C．$P(n)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}}\right)$　　　　D．$P(n)$的最大值为$\frac{1}{4}$

第 II 卷（非选择题　共 90 分）

三、填空题（本大题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分）

13．已知$f(x)=\tan x\cdot\left(e^{x}+e^{-x}\right)+6$，$f(t)=8$，则$f(-t)=$_________.

14．根据下面的数据：

x	1	2	3	4
y	32	48	72	88

求得y关于x的回归直线方程为$y=19.2x+12$，则这组数据相对于所求的回归直线方程的 4 个残差的方差为__________.（注：残差是指实际观察值与估计值之间的差）

15．斜率为$-\frac{1}{3}$的直线l与椭圆$C:\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$（$a>b>0$）相交于A，$B$两点，线段$AB$的中点坐标为$(1,1)$，则椭圆$C$的离心率等于______.

16．“韩信点兵”问题在我国古代数学史上有不少有趣的名称，如“物不知数”“鬼谷算”“隔墙算”“大衍求一术”等，其中《孙子算经》中“物不知数”问题的解法直至 1852 年传由传教士传入至欧洲，后验证符合由高斯得出的关于同余式解法的一般性定理，因而西方称之为“中国剩余定理”．原文如下：“今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？”这是一个已知某数被 3 除余 2，被 5 除余 3，被 7 除余 2，求此数的问题．满足条件的数中最小的正整数是______；1 至 2021 这 2021 个数中满足条件的数的个数是______.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分）

17．（本题满分 10 分）

$\triangle ABC$内角A，B，C的对边分别为a，b，c，$\sin A=\frac{\sqrt{15}}{8}$，$\cos B=\frac{11}{16}$.

（1）证明：$a:b:c=2:3:4$；

（2）若$\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right|=8$，求$\triangle ABC$的周长.

18.（本题满分 12 分）

设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$a_2=3$，且$S_5=4a_3+5$.

（1）求a_n和S_n；

（2）是否存在等差数列$\{b_n\}$，使得$\frac{S_1}{a_1a_2}+\frac{S_2}{a_2a_3}+\cdots+\frac{S_n}{a_na_{n+1}}=\frac{nb_n}{a_{n+1}}$对$n\in \mathbf{N}^*$成立？并证明你的结论.

19.（本题满分 12 分）

为保护学生视力，让学生在学校专心学习，防止沉迷网络和游戏，促进学生身心健康发展，教育部于 2021 年 1 月 15 日下发《关于加强中小学生手机管理工作的通知》，对中小学生的手机使用和管理作出了相关的规定．某研究型学习小组调查研究"中学生使用智能手机对学习的影响"，现对我校 80 名学生调查得到统计数据如下表，记 A 为事件："学习成绩优秀且不使用手机"；B为事件："学习成绩不优秀且不使用手机"，且已知事件 A 的频率是事件B的频率的 2 倍.

	不使用手机	使用手机	合计
学习成绩优秀人数	a	12	
学习成绩不优秀人数	b	26	
合计			

（1）运用独立性检验思想，判断是否有99.5%的把握认为中学生使用手机对学习成绩有影

响？

（2）采用分层抽样的方法从这 80 名学生中抽出 6 名学生，并安排其中 3 人做书面发言，记做书面发言的成绩优秀的学生数为 X，求 X 的分布列和数学期望．

参考数据：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$．

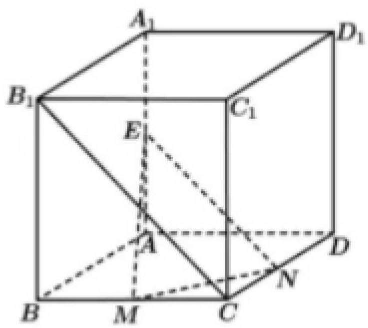
$P(K^2\geq k_0)$	0.10	0.05	0.01	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

20.（本题满分 12 分）

如图，四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，面 $ABB_1A_1\perp$ 面 $ABCD$，面 $ADD_1A_1\perp$ 面 $ABCD$，点 E、M、N 分别是棱 AA_1、BC、CD 的中点．

（1）证明：$AA_1\perp$ 面 $ABCD$．

（2）若四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，且 $AA_1=AD$，面 $EMN\cap$ 面 $ADD_1A_1=$ 直线 l，求直线 l 与 B_1C 所成角的余弦值．



21.（本题满分 12 分）

已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 过点 $D(3,1)$，且该双曲线的虚轴端点与两顶点

A_1,A_2 的张角为120°．

（1）求双曲线 E 的方程；

（2）过点 $B(0,4)$ 的直线 l 与双曲线 E 左支相交于点 M,N，直线 DM,DN 与 y 轴相交于

P,Q 两点，求 $|BP|+|BQ|$ 的取值范围．

22.（本题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(x-1)\left(ae^x-1\right)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=(e-1)(x-1)$，

（1）求 a 的值；

（2）若方程 $f(x)=b$ 有两个不同实根 x_1、x_2，证明：$|x_1-x_2|<\frac{eb}{e-1}+1$