

绝密★启用前

湘豫名校联考(2022年5月)

数学(理科)试卷

注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分。时间 120 分钟,满分 150 分。答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答第 I 卷时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。

3. 回答第 II 卷时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。

4. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求。

1. 已知集合 $A = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$, $B = \{x | x = \log_2 t, \frac{1}{2} \leq t \leq 4\}$, 则 $A \cap B =$ ()

A. $\{x | -1 \leq x \leq 4\}$

B. $\{x | 0 \leq x \leq 2\}$

C. $\{x | 1 \leq x \leq 2\}$

D. $\{x | 2 \leq x \leq 4\}$

2. 已知复数 $z = \frac{3-i}{2+i} \cdot bi$ (i 为虚数单位, $b \in \mathbf{R}$) 为实数, 则 $b =$ ()

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

3. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-1 \leq 0, \\ x-2y+2 \leq 0, \\ x-y+2 \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = 2x+y$ 的最大值为 ()

A. -4

B. -1

C. 1

D. $\frac{1}{2}$

4. 近年来,我国人口老龄化在不断加速,2013 年至 2021 年,我国老年(65 岁及以上)抚养比逐年攀升. 下图为国家统计局对 2013—2021 年中国 65 岁及以上人口数量与老年抚养

数学(理科)试题 第 1 页(共 6 页)

比统计.

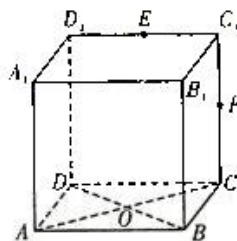


根据上图进行分析, 下列说法不正确的是 ()

- A. 2021年中国65岁及以上人口数量为2.01亿, 同比2020年增长了约5.24%
- B. 2021年老年抚养比为21.1%, 较2020年增加了1.4%
- C. 2013—2015年的老年抚养比增速不低于2019—2021年的老年抚养比增速
- D. 2013—2021年中国65岁及以上人口数量的极差为0.68亿, 中位数为1.6亿
5. 已知 $\left(\frac{2\sqrt{x}}{y} + \frac{y}{x}\right)^n$ 的展开式中所有项的系数之和为729, 则该展开式中 $\frac{y^2}{x}$ 项的系数是

- A. 12 B. 60 C. 120 D. 160

6. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为棱 C_1D_1, CC_1 的中点, O 为正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 的交点, 则下列结论不正确的是 ()



- A. $EF \parallel$ 平面 A_1BD
- B. $OF \perp$ 平面 A_1BD
- C. $OE \parallel$ 平面 BB_1C_1C
- D. $DE \parallel$ 平面 AA_1C_1C

7. 已知 $\tan 2\theta = -4\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$, 则 $\sin 2\theta =$ ()

- A. $-\frac{2}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

8. 已知 $3^a = 6, 5^b = 10, c = \lg 4 + \lg 5$, 则 ()

- A. $c > b > a$ B. $a > c > b$
- C. $a > b > c$ D. $c > a > b$

9. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 其中阴影

数学(理科)试题 第2页(共6页)

部分的面积为 2π , 则函数 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$ 上的最小值为

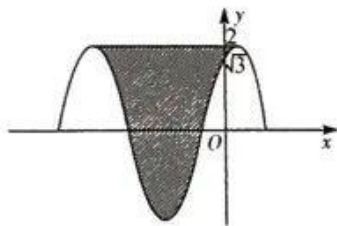
()

A. -2

B. $-\sqrt{3}$

C. -1

D. $\frac{1}{2}$



10. 过抛物线 $C: y^2 = 2x$ 的焦点 F 的直线与抛物线 C 相交于 A, B 两点, 点 D 为抛物线上一点, O 为坐标原点, 满足 $AB \parallel OD$, 且直线 OD 与直线 $x = 1$ 相交于点 E , 则

$$\frac{|AF| \cdot |BF|}{|OD| \cdot |OE|} =$$

()

A. 3

B. 2

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

11. 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp BC$, $AB = BC = AA_1 = 2$. 点 P 为 B_1C_1 的中点, 则四面体 $PABC$ 的外接球的表面积为

()

A. 8π

B. 10π

C. $\frac{41}{4}\pi$

D. 12π

12. 已知函数 $f(x) = (x+2)e^x$, 若对任意的 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x) > a(e^x - 1)$ 成立, 则整数 a 的最大值为

()

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

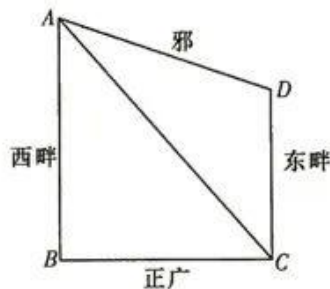
第 II 卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知函数 $f(x) = 3^x - \frac{a \cdot x - 2}{a^x} \cdot 3^{-x}$ ($a \neq 0$) 为奇函数, 则 $a =$ _____.

14. 在正六边形 $ABCDEF$ 中, 已知点 $A(-\sqrt{3}, 0)$, $\vec{AB} = (\sqrt{3}, 1)$, 则点 E 的坐标为 _____.

15. 《九章算术》是中国古代第一部数学专著. 《九章算术》中的“邪田”意为直角梯形, 上、下底称为“畔”, 高称为“正广”, 非高腰边称为“邪”. 如图所示, 邪长为 $4\sqrt{3}$, 东畔长为 $2\sqrt{7}$, 在 A 处测得 C, D 两点处的俯角分别为 49° 和 19° , 则正广长约为 _____.(注: $\sin 41^\circ \approx 0.66$)



16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 $y = kx$ ($k > 0$) 与双曲线 C 相交于 A, B 两点, 且点 A 在 x 轴上方, 若 $|AB| = |F_1F_2|$, $|AF_1| \leq \sqrt{3}|BF_1|$, 则双曲线 C 的离心率的取值范围是 _____.

数学(理科)试题 第 3 页(共 6 页)

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (本小题满分 12 分)

某医院为筛查某种疾病, 需要检验一项血液指标是否为阳性.

- (1) 现有 4 份血液样本, 其中有 2 份样本为阳性. 若采取逐份检验的方式, 求恰好经过 2 次检验就能把阳性样本全部找出来的概率;
- (2) 现有 200 份血液样本送检, 该医院打算分别采用甲试剂检验其中的 100 份, 采用乙试剂检验另外的 100 份, 检验结果如下表:

	使用甲试剂	使用乙试剂	合计
阴性	80	85	165
阳性	20	15	35
合计	100	100	200

根据上面的列联表判断, 是否有 90% 的把握认为检验结果与使用甲、乙试剂的选择有关.

附:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.050	0.025
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024

$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n = a + b + c + d.$$

18. (本小题满分 12 分)

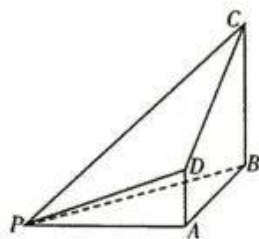
已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_n > 3$, 且 $9n - 1, 3S_n, a_n^2$ 成等差数列.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 设 $b_n = (a_n - 3) \cdot 2^{n-2}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $BC \perp$ 平面 PAB , $AD \perp$ 平面 PAB , $PA = AB = BC = 3AD = 6$, $\angle PAB = 120^\circ$.

- (1) 求证: 平面 $PCD \perp$ 平面 $ABCD$;
(2) 求平面 PCD 与平面 PAD 所成锐二面角的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的四个顶点构成的平行四边形的周长为 $4\sqrt{14}$, 短轴顶点与焦点构成的平行四边形的周长为 12.

- (1) 求椭圆 C 的标准方程;
(2) 分别过椭圆的左、右顶点 A_1, A_2 作直线 A_1M, A_2N , 与椭圆 C 分别相交于点 M, N (M, N 分别在 x 轴的上方与下方), 与 y 轴分别相交于点 P, Q , 若直线 MN 恒过定点 $(1, 0)$, 且 $|OP| = \lambda|OQ|$ (O 为坐标原点), 求 λ 的值.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = a \ln x - \frac{2x}{e} - 1 (a \in \mathbf{R}, e$ 为自然对数的底数).

- (1) 求函数 $f(x)$ 的极值;
(2) 若方程 $f(x) + \frac{x}{e} + 1 = 0$ 在区间 $(1, e^2)$ 内有两个不相等的实数根 x_1, x_2 , 证明:

$$\ln x_1 \cdot \ln x_2 > \frac{1}{a}.$$

(二)选考题:共 10 分.请考生在第 22~23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22.(本小题满分 10 分)选修 4-4:坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x=3-\frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$
以坐标原点

O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,圆 C 的圆心为 $(3, \frac{\pi}{2})$,半径为 3.

(1)求直线 l 和圆 C 的极坐标方程;

(2)若直线 l 与圆 C 相交于 A, B 两点,求 $\sin^2 \angle OBA + \sin^2 \angle OAB$ 的值.

23.(本小题满分 10 分)选修 4-5:不等式选讲

已知函数 $f(x) = |2x-a| - |x+a| (a \in \mathbf{R})$.

(1)当 $a=1$ 时,求不等式 $f(x) > 0$ 的解集;

(2)若不等式 $f(x) \geq a^2 - 3|x+a| + 2$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

