邕衡金卷广西2023届高三一轮复习诊断性联考理科数学答案

1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12
D	C	C	C	D	A	C	B	D	A	A

1．D【解析】$\overline{z}=1-\sqrt{2}\mathrm{i},z\overline{z}=(1+\sqrt{2}\mathrm{i})(1-\sqrt{2}\mathrm{i})=1+2=3.\ \frac{z}{z\overline{z}+3}=\frac{1+\sqrt{2}\mathrm{i}}{6}=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}\mathrm{i}$ 故选 ：D

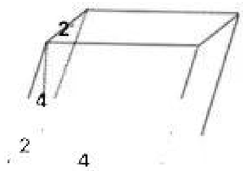
2．C

3.C【解析】因为 $A=\left\{x\middle|y=\sqrt{25-x^2}\right\}$， $\because 25-x^2\geq 0$，所以 $\therefore A=\left\{x\middle|-5\leq x\leq 5\right\}$

$\because B=\left\{x\middle|x^2+4x-12<0\right\}=\left\{x\middle|-6<x<2\right\}$，则 $\complement_{\mathrm{R}}B=\left\{x\middle|x\leq -6\text{或}x\geq 2\right\}$

故 $A\cap\left(\complement_{\mathrm{R}}B\right)=\left\{x\middle|2\leq x\leq 5\right\}$，故选：C.

4.C【解析】由几何体的三视图可知几何体的直观图如下：



所以 $V=Sh=2\times4\times4=32$. 故选：C

5.D【解析】因为 $f(-x)=\frac{x^2(-\sin 2x)}{2^{-x}-2^{x}}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，故A，C错误；$f(1)=\frac{1^2\sin 2}{2^1-2^{-1}}>0$，选项B符合函数 $f(x)$，B不符合. 故选：D.

6.A【解析】$\because$ 函数 $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{ax+2}$， $\therefore f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x(ax+2)-a\mathrm{e}^x}{(ax+2)^2}=\frac{\mathrm{e}^x(ax+2-a)}{(ax+2)^2}$

$\therefore f'(-1)=\frac{\mathrm{e}^{-1}(-a+2-a)}{(-a+2)^2}=0$， $\therefore a=1$

$\therefore f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x(x+2)-\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}=\frac{\mathrm{e}^x(x+1)}{(x+2)^2}\ x\in(-2,+\infty)$

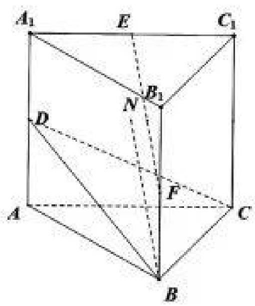
$\therefore$ 当 $-2<x<-1$ 时， $f'(x)<0$，即函数 $f(x)$ 在 $(-2,-1)$ 上单调递减，

当 $x>-1$ 时， $f'(x)>0$，即函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极小值即最小值， $\therefore f(x)_{\min}=f(-1)$，

$\because$ 函数 $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x+2}$ 在 $(-2,b)$ 上有最小值， $\therefore b>-1$，即 $b\in(-1,+\infty)$；故选：A.

7.C【解析】如图取 AC 中点 M，连接 EM，取 EM 的中点 N. 连接 BN，则有 $EF//BN$，则直线 EF 与平面 BCD 所成角可转化成求则直线 BN 与平面 BCD 所成角. 因为 $AB=BC=AC=2,CC_1\perp$ 平面 ABC，E 为 A_1C_1 中点，$EF=\sqrt{B_1F^2+B_1E^2}=2$，又由等体积法 $V_{N-BCD}=V_{B-CDN}$ 可求得点 N 到面 BCD 的距离 $d=\frac{\sqrt{3}}{4}$，所以直线 EF 与平面 BCD 所成角的正弦



值 $\sin\theta=\dfrac{d}{EF}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

8. B【解析】设圆心角 $\alpha=\dfrac{l}{r}$，$l<r,\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{l}{2r}\in(0,\dfrac{1}{2})$，所以 $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\cos\dfrac{l}{2r}\approx 1-\dfrac{(\frac{l}{2r})^2}{2}=1-\dfrac{l^2}{8r^2}=\dfrac{|CO|}{r}$，

$|CO|\approx r-\dfrac{l^2}{8r}$，所以 $|CD|\approx r-(r-\dfrac{l^2}{8r})=\dfrac{l^2}{8r}$. 故选：B.

9. B【解析】设圆锥高为 h, 底面圆半径 $r=\dfrac{\sqrt{3}h}{3}$，圆锥的体积为 $V_1=\dfrac{1}{3}\pi\times\dfrac{1}{3}h^2\times h=\dfrac{h^3}{9}$，

圆柱的半径 $r=\dfrac{\sqrt{3}h}{9}$，高为 $\dfrac{2h}{3}$，体积为 $V_2=\pi\times\dfrac{1}{27}h^2\times\dfrac{2}{3}h=\dfrac{2h^3}{81}$，所以 $V_1:V_2=2:9$.

10. D【解析】依题意可得 $\omega>0$，因为 $x\in(0,\pi)$，所以 $\omega x-\dfrac{\pi}{6}\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\omega\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)$，

要使函数在区间 $(0,\pi)$ 恰有三个极值点、三个零点，作出 $y=2\sin t$ 的图象，容易得到

则 $\dfrac{5\pi}{2}<\omega\pi-\dfrac{\pi}{6}\le 3\pi$，解得 $\dfrac{8}{3}<\omega\le\dfrac{19}{6}$，即 $\omega\in\left(\dfrac{8}{3},\dfrac{19}{6}\right]$. 故选：D.

11. A【解析】由题意得，点 M 为 PQ 中点

$\because k_{PQ}=-k_{BF_1}=k_{BF_2}=-\dfrac{b}{c}$ $\because k_{OM}\bullet k_{PQ}=\dfrac{b^2}{a^2}$，$M(-1,1)$

$\therefore k_{PQ}=-\dfrac{b}{c}=-\dfrac{4b^2}{a^2}$ $\therefore 4bc=a^2$ $\therefore 16b^2c^2=a^4$，$\therefore 16e^4-16e^2-1=0$ $\therefore e^2=\dfrac{\sqrt{5}+2}{4}$

12. A【解析】**方法一：构造法**

设 $f(x)=\ln(1+x)-x(x>-1)$，因为 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=-\dfrac{x}{1+x}$，

当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $f'(x)<0$，

所以函数 $f(x)=\ln(1+x)-x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，在 $(-1,0)$ 上单调递增，

所以 $f(\dfrac{3}{7})<f(0)=0$，所以 $\ln\dfrac{10}{7}-\dfrac{3}{7}<0$，故 $\dfrac{3}{7}>\ln\dfrac{10}{7}=-\ln 0.7$，即 $c>a$，

所以 $f(-\dfrac{3}{10})<f(0)=0$，所以 $\ln\dfrac{7}{10}+\dfrac{3}{10}<0$，故 $\dfrac{7}{10}<\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}}$，所以 $\dfrac{3}{10}\mathrm{e}^{\frac{3}{10}}<\dfrac{3}{7}$，故 $b<c$，

设 $g(x)=x\mathrm{e}^x+\ln(1-x)(0<x<1)$，则 $g'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{(x^2-1)\mathrm{e}^x+1}{x-1}$，

令 $h(x)=\mathrm{e}^x(x^2-1)+1$，$h'(x)=\mathrm{e}^x(x^2+2x-1)$，

当 $0<x<\sqrt{2}-1$ 时，$h'(x)<0$，函数 $h(x)=e^x(x^2-1)+1$ 单调递减，

当 $\sqrt{2}-1<x<1$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h(x)=e^x(x^2-1)+1$ 单调递增，

又 $h(0)=0$，所以当 $0<x<\sqrt{2}-1$ 时，$h(x)<0$，

所以当 $0<x<\sqrt{2}-1$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)=xe^x+\ln(1-x)$ 单调递增，

所以 $g(0.3)>g(0)=0$，即 $0.3e^{0.3}>-\ln 0.7$，所以 $b>a$ 故选：A.

方法二：比较法

解：　$a=-\ln(1-0.3), b=0.3e^{0.3}$，$c=\dfrac{0.3}{1-0.3}$

① $\ln b-\ln c=0.3+\ln(1-0.3)$，　令 $f(x)=x+\ln(1-x), x\in(0,0.3]$,

则 $f'(x)=1-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{-x}{1-x}<0$，　故 $f(x)$ 在 $(0,0.3]$ 上单调递减，

可得 $f(0.3)<f(0)=0$，即 $\ln b-\ln c<0$，所以 $b<c$；

② $b-a=0.3e^{0.3}+\ln(1-0.3)$，　令 $g(x)=xe^x+\ln(1-x), x\in(0,0.3]$,

则 $g'(x)=xe^x+e^x-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{(1+x)(1-x)e^x-1}{1-x}$，

令 $k(x)=(1+x)(1-x)e^x-1$，所以 $k'(x)=(1-x^2-2x)e^x>0$，

所以 $k(x)$ 在 $(0,0.3]$ 上单调递增，可得 $k(x)>k(0)=0$，则 $g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,0.3]$ 上单调递增，可得 $g(0.3)>g(0)=0$，即 $b-a>0$，所以 $b>a$.

故 $a<b<c$.

13. 1【解析】由投影的定义知，a 在 b 方向上的投影为 $|a|\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=2\times\dfrac{1}{2}=1$.

14. $\dfrac{3}{5}$【解析】不妨设第一次取到新球的事件为A，第二次取到旧球的事件为B，则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{3}{5}.$$

15. 2【解析】由题意得，四边形 PF_1QF_2 是矩形，由焦点三角形面积公式得

$$\Delta F_1PF_2=b^2\tan\frac{\theta}{2}=1\times\tan 45^\circ=1,\quad \therefore S_{\text{矩形}PF_1QF_2}=2S_{\Delta F_1PF}=2.$$

16. $\dfrac{64\sqrt{3}}{9}$【解析】在 ΔABC 中，设 $AB=c$，$BC=a$，$AC=b$，

由 $AD=3DC$，则 $\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC}$，则 $\left|\overrightarrow{BD}\right|^2=\dfrac{1}{16}(c^2+9a^2+3ac)$，

$16^2=c^2+9a^2+3ac\geq 9ac$，即 $ac\leq\dfrac{256}{9}$，

$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}ac\le\frac{64\sqrt{3}}{9}$，当且仅当$3a=c$时取等号.

所以ΔABC面积的最大值为$\frac{64\sqrt{3}}{9}$.

17. 解：（1）当$n=1, S_1=2a_1-\frac{1}{4}, a_1=\frac{1}{4}$,…………………………………（1分）

因为$S_n=2a_n-\frac{1}{4}$.①,

当$n\ge 2$时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-\frac{1}{4}$.②，……………………………………………（2分）

①-②得，$S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$，…………………………………………（3分）

即$a_n=2a_n-2a_{n-1}$，所以$a_n=2a_{n-1}$，$n\ge 2$且$n\in N^*$，

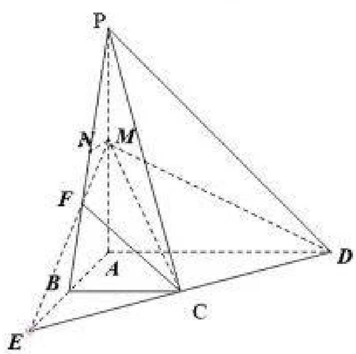
所以$\{a_n\}$是以$\frac{1}{4}$为首项，2为公比的等比数列.……………………………（6分）

（2）由（1）可得$a_n=2^{n-3}$，$b_n=\log_2 2^{n-3}=n-3$.……………………………（8分）

所以$T_n=-2n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{2}n=\frac{1}{2}\left(n-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{8}$，…………………………（10分）

所以，当$n=2$或$n=3$时，$(T_n)_{\min}=-3$.……………………………………（12分）

18. 解：（1）延长$DC\cap AB=E$，连接ME交PB于F，连接FC，………………（1分）



如图，四边形$MFCD$为截面α……………………（2分）

ΔADE中，$BC // AD$，由$\frac{BC}{AD}=\frac{1}{2}$，则$C$为$DE$中点，$B$为$AE$中点.………（3分）

过M作$MN // AB$交PB于N，则$MN=\frac{1}{2}AB=1$，$MN // AB$

$\therefore \Delta MNF\sim\Delta EBF \therefore \frac{FN}{BF}=\frac{MN}{BE}=\frac{1}{2}$………………………（4分）

$\therefore BF=2NF$，即$BF=\frac{1}{3}BP$………………………（5分）

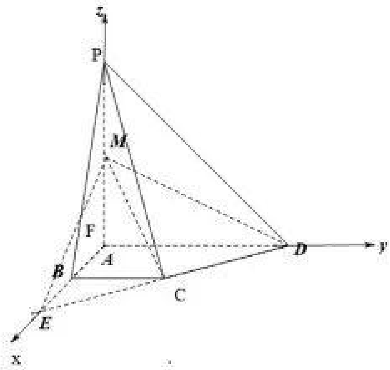
$\therefore F$为棱PB上靠近点B位置的三等分点.………………（6分）

（2）以 A 为原点，AB 为 x 轴，AD 为 y 轴，AP 为 z 轴，建立空间坐标系如图，

则有：$P(0,0,4),B(2,0,0),D(0,4,0),C(2,2,0),M(0,0,2)$，$F\left(\frac{4}{3},0,\frac{4}{3}\right)$ …… （7 分）

设平面 PBC 的一个法向量为

$\vec{p}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{PB}=(2,0,-4),\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$



则有 $\begin{cases}\vec{p}\cdot\overrightarrow{PB}=0\\ \vec{p}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}2x-4z=0\\ 2y=0\end{cases}$，

令 $z=1$，则 $\vec{p}=(2,0,1)$ ………………… （8 分）

设平面 α 的一个法向量为

$\vec{q}=(a,b,c)$，$\overrightarrow{DM}=(0,-4,2),\overrightarrow{CD}=(-2,2,0)$

$\begin{cases}\vec{q}\cdot\overrightarrow{DM}=0\\ \vec{q}\cdot\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}-4b+2c=0\\ -2a+2b=0\end{cases}$

令 $a=1$，则 $b=1$，$c=2$，$\vec{q}=(1,1,2)$ ………………………………… （9 分）

设平面 α 与平面 PBC 的锐二面角的平面角为 θ，则 $\cos\theta=\left|\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|}\right|$ ………… （10 分）

$=\frac{2\times1+0\times2+1\times2}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}\frac{2\sqrt{30}}{15}$ ……………………………… （11 分）

所以平面 α 与平面 ABC 的二面角的锐平面角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{30}}{15}$ …………… （12 分）

19. 解析：（1）设“甲班级在篮球、足球、羽毛球中获胜”为事件 A,B,C，

“甲班级获得冠军”为事件 D，……………………………………… （1 分）

则 $P(A)=0.4=\frac{2}{5},P(B)=0.8=\frac{4}{5},P(C)=0.6=\frac{3}{5}$，……………………… （2 分）

所以 $P(D)=P(ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)$，……………………………… （3 分）

$=\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}\times(1-\frac{3}{5})+\frac{2}{5}\times(1-\frac{4}{5})\times\frac{3}{5}+(1-\frac{2}{5})\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}$

$=\frac{82}{125}$（或者 0.656）…………………………………………………… （5 分）

（2）X 的可能取值为 $0,8,16,24$，……（6 分）

$P(X=0)=P(ABC)=\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{24}{125}$，……（7 分）

$P(X=8)=P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)$

$=\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}\times(1-\frac{3}{5})+\frac{2}{5}\times(1-\frac{4}{5})\times\frac{3}{5}+(1-\frac{2}{5})\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{58}{125}$……（8 分）

$P(X=16)=P(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C})$

$=\frac{2}{5}(1-\frac{4}{5})(1-\frac{3}{5})+(1-\frac{2}{5})(1-\frac{4}{5})\frac{3}{5}+(1-\frac{2}{5})\frac{4}{5}(1-\frac{3}{5})=\frac{37}{125}$……（9 分）

$P(X=24)=P(\overline{ABC})=(1-\frac{2}{5})(1-\frac{4}{5})(1-\frac{3}{5})=\frac{6}{125}$……（10 分）

所以 X 的分布列为 ……（11 分）

X	0	8	16	24
P	$\frac{24}{125}$	$\frac{58}{125}$	$\frac{37}{125}$	$\frac{6}{125}$

期望 $E(X)=0\times\frac{24}{125}+8\times\frac{58}{125}+16\times\frac{37}{125}+24\times\frac{6}{125}=\frac{48}{5}$……（12 分）

20. 解：（1）抛物线的准线为 $x=-\frac{p}{2}$，当 MD 与 x 轴垂直时，点 M 的横坐标为 p，

此时 $|MF|=p+\frac{p}{2}=3$……（2 分）

所以 $p=2$……（3 分）

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$……（4 分）

（2）设 $P\left(\frac{y_1^2}{4},y_1\right),Q\left(\frac{y_2^2}{4},y_2\right),R\left(\frac{y_3^2}{4},y_3\right),S\left(\frac{y_4^2}{4},y_4\right)$，

显然直线 PQ 的斜率不为 0，……（5 分）

设直线 PQ：$x=my-1$，与抛物线 $y^2=4x$ 联立可得 $y^2-4my+4=0$，且 $\Delta>0$

则 $y_1 \cdot y_2=4$……（6 分）

由 P，B，R 三点共线，……（7 分）

故 $k_{BR}=k_{PR}$，$\therefore \frac{y_3+1}{\frac{y_3^2}{4}-1}=\frac{y_1-y_3}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_3^2}{4}}$ 即 $\frac{y_3+1}{y_3^2-4}=\frac{1}{y_1+y_3}$，即 $y_3=\frac{-4-y_1}{y_1+1}$……（9 分）

同理：由 Q，B，S 三点共线，

故 $k_{BS}=k_{QS}$，$\therefore \frac{y_4+1}{\frac{y_4^2}{4}-1}=\frac{y_2-y_4}{\frac{y_2^2}{4}-\frac{y_4^2}{4}}$ 即 $\frac{y_4+1}{y_4^2-4}=\frac{1}{y_2+y_4}$，即 $y_4=\frac{-4-y_2}{y_2+1}$……（10 分）

所以 $k_{QR}+k_{PS}=\frac{y_2-y_3}{\frac{y_2^2}{4}-\frac{y_3^2}{4}}+\frac{y_1-y_4}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_4^2}{4}}=\frac{4}{y_2+y_3}+\frac{4}{y_1+y_4}=\frac{4}{y_2+\frac{-4-y_1}{y_1+1}}+\frac{4}{y_1+\frac{-4-y_2}{y_2+1}}=4$，所以直线 QR 与直线 PS 的斜率之和为定值-4.……（12 分）

21．解：（1）当 $a=1$ 时，函数 $f(x)=x(\ln x+1)$．$f'(x)=\ln x+2$，……………（1 分）

则 $f'(1)=2$，即切线斜率为 2，……………（2 分）又 $f(1)=1$，……………（3 分）

则切线 l 的方程为 $y-1=2\times(x-1)$，即切线方程为 $2x-y-1=0$……………（4 分）

（2）∵ x_1，x_2 是方程 $f(x)=x^2$ 的两个不等实根，$x_2>2x_1$，且 $x_1>0$，$x_2>0$，

则 $\begin{cases}x_1\ln x_1-ax_1^2+x_1=0\\x_2\ln x_2-ax_2^2+x_2=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\ln x_1+1=ax_1\\\ln x_2+1=ax_2\end{cases}$，……………（6 分）

$\therefore a=\dfrac{\ln x_1+\ln x_2+2}{x_1+x_2}=\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$，即 $\ln x_1x_2+2=\dfrac{(x_1+x_2)\ln\dfrac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}$，……………（7 分）

令 $t=\dfrac{x_2}{x_1}$，则 $t>2$，则 $\ln x_1x_2+2=\dfrac{(t+1)\ln t}{t-1}$，令 $g(t)=\dfrac{(t+1)\ln t}{t-1}$，则 $g'(t)=\dfrac{t-\dfrac{1}{t}-2\ln t}{(t-1)^2}$（8 分）

令 $h(t)=t-\dfrac{1}{t}-2\ln t$，则 $h'(t)=\dfrac{(t-1)^2}{t^2}>0$，则 $h(t)$ 单调递增，……………（9 分）

$\therefore h(t)>h(2)=\dfrac{3}{2}-2\ln 2>0$，即 $g'(t)>0$，则 $g(t)$ 单调递增，$\therefore g(t)>g(2)=3\ln 2$…（10 分）

$\therefore \ln x_1x_2+2>3\ln 2$，即 $\ln x_1x_2>3\ln 2-2=\ln\dfrac{8}{e^2}$，即 $x_1x_2>\dfrac{8}{e^2}$，……………（11 分）

则∵ $x_1^2+x_2^2\ge 2x_1x_2$（由于 $x_1\ne x_2$，故不取等号），$\therefore x_1^2+x_2^2>\dfrac{16}{e^2}$，得证……………（12 分）

22．解：（Ⅰ）由 $\begin{cases}x=2\cos\varphi\\y=\sqrt{3}\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 是参数）消去参数 φ 得：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ……………（2 分）

将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入上式……………（3 分）

所以曲线 C 的极坐标方程为 $3\rho^2\cos^2\theta+4\rho^2\sin^2\theta=12$（或 $\rho^2=\dfrac{12}{3+\sin^2\theta}$）……（5 分）

（Ⅱ）∵点 $A(\rho_1,\theta)$，$B(\rho_2,\theta+\dfrac{\pi}{3})$，$C(\rho_3,\theta+\dfrac{2\pi}{3})$ 在在曲线 C 上，

$\therefore \dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}+\dfrac{1}{|OC|^2}=\dfrac{1}{\rho_1^2}+\dfrac{1}{\rho_2^2}+\dfrac{1}{\rho_3^2}$……………（6 分）

$=\dfrac{1}{12}[3+\sin^2\theta+3+\sin^2(\theta+\dfrac{\pi}{3})+3+\sin^2(\theta+\dfrac{2\pi}{3})]$

$=\dfrac{1}{12}[3+\sin^2\theta+3+(\dfrac{1}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta)^2+3+(-\dfrac{1}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta)^2]$……………（7 分）

$=\dfrac{1}{12}\left[9+\sin^2\theta+\dfrac{1}{4}\sin^2\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta+\dfrac{3}{4}\cos^2\theta+\dfrac{1}{4}\sin^2\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta+\dfrac{3}{4}\cos^2\theta\right]$

（8 分）

$=\dfrac{1}{12}(9+\sin^2\theta+\dfrac{1}{2}\sin^2\theta+\dfrac{3}{2}\cos^2\theta)$……………（9 分）

$=\dfrac{1}{12}\times\left(9+\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{7}{8}$……………（10 分）

23．解：（1）解法一：由柯西不等式得：

$(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{5}{2}}+b^{\frac{5}{2}})=[(a^{\frac{1}{4}})^2+(b^{\frac{1}{4}})^2]\cdot[(a^{\frac{5}{4}})^2+(b^{\frac{5}{4}})^2]$……………………（3 分）

$[(a^{\frac{1}{4}})^2+(b^{\frac{1}{4}})^2]\cdot[(a^{\frac{5}{4}})^2+(b^{\frac{5}{4}})^2]\ge(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}})^2=4$……………………（4 分）

当 $a=b$ 时，等号成立．所以原式得证……………………（5 分）

解法二：

$(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{5}{2}}+b^{\frac{5}{2}})=a^3+b^3+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{2}}+a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{2}}$……………………（1 分）

$=(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}})^2+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{2}}+a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{2}}-2a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}$……………………（2 分）

$\ge(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}})^2+2\sqrt{a^{\frac{6}{2}}b^{\frac{6}{2}}}-2a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}$……………………（3 分）

当 $a=b$ 时，等号成立……………………（4 分）

即 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a^{\frac{5}{2}}+b^{\frac{5}{2}})\ge=(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}})^2=4$……………………（5 分）

（2）解法一：由 $a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}=2$ 及 $ab\le\dfrac{(a+b)^2}{4}$……………………（6 分）

$2=(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})\cdot(a+b-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}})=(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})[(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2-3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}]$……………………（7 分）

$\ge(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})\cdot[(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2-\dfrac{3(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2}{4}]$

$2\ge\dfrac{(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^3}{4}$……………………（8 分）

当 $a=b=1$ 时，等号成立……………………（9 分）

所以 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\le2$……………………（10 分）

解法二：因为 $a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}=2$

所以：$(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^3-8=(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^3-4(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}})$……………………（6 分）

$=a^{\frac{3}{2}}+3ab^{\frac{1}{2}}+3a^{\frac{1}{2}}b+b^{\frac{3}{2}}-4a^{\frac{3}{2}}-4b^{\frac{3}{2}}$

$=3a(b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}})+3b(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})=-3(a+b)(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})=-3(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})^2$……（7 分）

又 $a>0,b>0$，所以：

$-3(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})^2\le0$……………………（8 分）

$(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^3\le8$　　当 $a=b=1$ 时，等号成立……………………（9 分）

所以，$\sqrt{a}+\sqrt{b}\le2$……………………（10 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。