

2. 填空题
3. 本试卷主要考试内容：集合与常用逻辑用语、函数、导数、三角函数、数列、不等式、直线与圆、圆锥曲线。

第 I 卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | -7 < 3 - 2x < 1\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\{2, 3\}$ B. $\{2, 4\}$ C. $\{3, 4\}$ D. $\{2, 3, 4\}$
2. 已知函数 $f(x) = |x - 2| + 1$, 则“ $f(x) = 2$ ”是“ $x = 3$ ”的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 抛物线 $C: y = -10x^2$ 的准线方程是
 A. $y = \frac{1}{20}$ B. $y = -\frac{1}{20}$ C. $y = \frac{1}{40}$ D. $y = -\frac{1}{40}$
4. 已知向量 $a = (x, 1)$, $b = (-2, y)$, 若 $2a + b = (2, 6)$, 则向量 a 与 b 的夹角为
 A. $\frac{3\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{6}$
5. 函数 $f(x) = \frac{3x^2 \cos x}{e^x - e^{-x}}$ 的部分图象大致为
6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A = \sin B \cos C$, 则 $\triangle ABC$ 是
 A. 直角三角形 B. 等腰直角三角形 C. 等腰三角形 D. 等边三角形
7. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x)$ 单调递减, 则不等式 $f(2x - 1) + f(5x - 13) < 0$ 的解集为
 A. $(2, +\infty)$ B. $(-\infty, -2)$ C. $(-\infty, 2)$ D. $(-2, +\infty)$
8. 若点 $M(4, 0)$ 到双曲线 $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的一条渐近线的距离为 2, 则双曲线 C 的离心率为
 A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

声音是由物体振动产生的声波。我们听到的每个音都是由纯音合成的(纯音)的数学模型是函数 $y = A \sin \omega t$ 。音有四要素：音调、响度、音长和音色。它们都与函数 $y = A \sin \omega t$ 及其参数有关，比如：响度与振幅有关，振幅越大响度越大，振幅越小响度越小；音调与频率有关，频率低的声音低沉，频率高的声音尖锐。我们平时听到的乐音不只是一个音在响，而是许多音的结合，称为复合音。我们听到的声音对应的函数是 $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{4} \sin 4x + \dots$ 。结合上述材料及所学知识，给出下列说法：

- ①函数 $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{4} \sin 4x + \dots + \frac{1}{10} \sin 10x$ 不具有奇偶性；
②函数 $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{4} \sin 4x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$ 上单调递增；
③若某声音甲的对应函数近似为 $g(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$ ，则声音甲的响度一定比纯音 $h(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$ 的响度小；
④若某声音乙的对应函数近似为 $\varphi(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$ ，则声音乙一定比纯音 $h(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$

更低沉。

其中错误的是

A. ①②

C. ②③

B. ①③

D. ①③④

10. 已知点 $A(0, 2)$, $B(1, 1)$, 且点 P 在圆 $C: (x-2)^2 + y^2 = 4$ 上, C 为圆心, 则下列说法错误的是
A. $|PA| + |PB|$ 的最小值为 $\sqrt{2}$
B. 当 $\angle PAB$ 最大时, $\triangle APB$ 的面积为 2
C. $|PA| - |PC|$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$
D. $||PA| - |PB||$ 的最大值为 $\sqrt{2}$

11. 已知 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, 且 $\alpha\beta \neq 0$, $1 - 4 \tan \alpha \tan \beta = \frac{1}{\cos^2 \beta}$, 则 $\tan(\alpha + \beta)$ 的最大值是

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{4}{5}$

12. 已知函数 $f(x) = ax^4 + (x-1)e^x$ 在区间 $[1, 3]$ 上不是单调函数, 则实数 a 的取值范围是

A. $(-\frac{e}{4}, -\frac{e^2}{16})$

B. $(-\frac{e}{4}, -\frac{e^2}{16}]$

C. $(-\frac{e^3}{36}, -\frac{e^2}{16})$

D. $(-\frac{e}{4}, -\frac{e^3}{36})$

第 II 卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。把答案填在答题卡中的横线上。

13. 已知实数 a, b 满足 $b = \frac{1}{4a}$, 则 $a^2 + b^2$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

14. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} 2x - 3y + 7 \leq 0, \\ x \geq -2, \\ y \leq 3, \end{cases}$ 则目标函数 $z = 2x + y$ 的最小值为 -3 .

5. 已知直线 $l_1: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 经过点 $P(1, 2)$, 且与直线 $l_2: 2x + y + m = 0$ 平行, 则 $a + b =$

若这两条平行线之间的距离为 $\sqrt{5}$, 且 l_2 不经过第一象限, 则 $m =$. (本题第一空 3 分, 第二空 2 分)

• 22-09-78C

【高三数学 第 2 页(共 4 页)文科】

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=6$, $AC=6\sqrt{3}$, $BC=12$, 动点 P 自点 C 出发沿 CB 运动, 到达点 B 时停止, 动点 Q 自点 B 出发沿 BC 运动, 到达点 C 时停止, 且动点 Q 的速度是动点 P 的 3 倍. 若二者同时出发, 且一个点停止运动时, 另一个点也停止运动, 则该过程中 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 的最大值是

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=1$, 且 $2a_1$ 是 a_5 与 $-3a_3$ 的等差中项.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $S_m=127$, 求 m .

$$a_1=1 \quad a_2=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4} \quad a_3=\frac{1+9}{4}=\frac{5}{2} \quad a_4=7$$

18. (12 分)

已知函数 $f(x)=2x+1-4\ln x$.

(1) 求 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 求 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上的最大值与最小值.

19. (12 分)

已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ ($\omega>0$, $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$) 满足下列三个条件中的两个:

① 函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴的任意两个相邻交点之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$;

② 直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴;

③ $f(\frac{\pi}{4})=0$, 且 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ 上单调.

(1) 请指出这两个条件, 说明理由, 并求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$, 求函数 $f(x)$ 的值域.

20. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{1}{2}$, 且 C 经过点 $P(-2, 0)$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

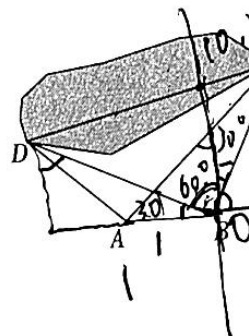
(2) 过点 P 的直线 l 交 C 于另一点 A , 若 $|PA| = \frac{12\sqrt{2}}{7}$, 求直线 l 的斜率.

21. (12分)

为了测量一个不规则湖泊两端 C, D 之间的距离, 如图, 在东西方向上选取相距 1 km 的 A, B 两点, 点 B 在点 A 的正东方向上, 且 A, B, C, D 四点在同一水平面上. 从点 A 处观测得点 C 在它的东北方向上, 点 D 在它的西北方向上; 从点 B 处观测得点 C 在它的北偏东 30° 方向上, 点 D 在它的北偏西 60° 方向上.

(1) 求 C, D 两点之间的距离;

(2) 以点 D 为观测点, 求点 C 的方位角.



22. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{a(x-1)}{x+1} - \ln x$.

(1) 若 $a = \frac{1}{2}$, 证明: 当 $x > 1$ 时, $f(x) < 0$.

(2) 若 $f(x)$ 有 3 个不同的零点, 求 a 的取值范围.