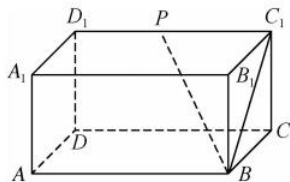


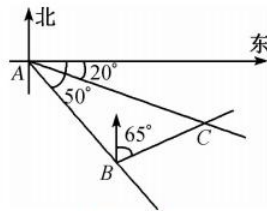
巴东县第三高级中学高一下期末考试·数学

参考答案、提示及评分细则

1. B $z = \frac{3+i}{2-i} = \frac{(3+i)(2+i)}{5} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$. 故选 B.
2. D 由 $\log_2 x < 1$, 解得 $0 < x < 2$, 所以 $A = (0, 2)$, 故 $A \cap B \neq \emptyset$, 其他选项均不正确. 故选 D.
3. C $|a| = 8, |b| = 12$, a 与 b 的夹角为 45° , 则向量 a 在 b 上的投影向量为 $\frac{a \cdot b}{|b|} \cdot \frac{b}{|b|} = \frac{\sqrt{2}}{3}b$. 故选 C.
4. A 因为 $\cos 165^\circ = \cos(90^\circ + 75^\circ) = -\sin 75^\circ$, 则 $\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$, $\cos 165^\circ = -\sin 75^\circ = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$. 故选 A.
5. C 由关于 x 的不等式 $f(x) = x^2 - ax + 1 < 0$ 有解, 得 $\Delta = (-a)^2 - 4 > 0$, 解得 $a < -2$ 或 $a > 2$, 只有 C 选项符合. 故选 C.
6. B 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 易得 $PC_1 \perp BC_1$, 且 $PC_1 \perp CC_1$, 所以 $\angle BC_1C$ 即为二面角 $B - PC_1 - C$ 的平面角, 又 $BB_1 = BC$, 易得 $\angle BC_1C = 45^\circ$. 故选 B.



第 6 题图

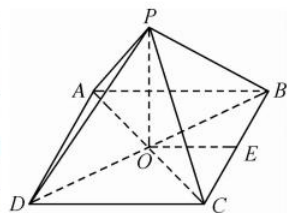


第 7 题图

7. A 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 80$, $\angle CAB = 30^\circ$, $\angle ACB = 45^\circ$, 根据正弦定理得 $\frac{BC}{\sin \angle CAB} = \frac{AB}{\sin \angle ACB}$, 解得

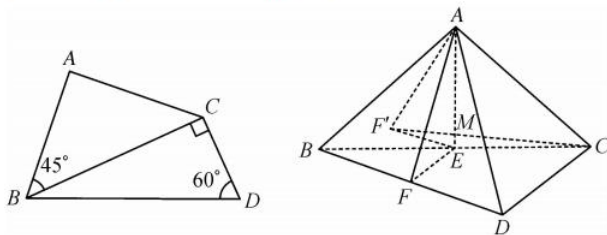
$$BC = \frac{AB \sin \angle CAB}{\sin \angle ACB} = \frac{80 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 40\sqrt{2}, \text{ 即 } B, C \text{ 两点间的距离是 } 40\sqrt{2} \text{ 海里. 故选 A.}$$

8. C 连接 BD, AC 交于 O , 连接 PO , 则 $PO \perp$ 底面 $ABCD$ 且 O 是 AC 中点, $AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$, $PO = \sqrt{PC^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$, 所以 O 到 P, A, B, C, D 的距离均为 $2\sqrt{2}$, 点 O 即为正四棱锥 $P - ABCD$ 的外接球球心. 取 BC 中点 E , 连接 OE , 分析可知, 当 $OE \perp \alpha$ 时, 截面圆的面积最小, 线段 BC 也即此时截面圆的直径, 所以截面圆的面积的最小值为 4π . 故选 C.



9. AD 对于 A, $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$, 当且仅当 $x = \pm 1$ 时, 取等号, 故 $f(x)_{\min} = 2$, 则 A 正确; 对于 B, $f(x) = 2x + \frac{2}{x}$ 的值域为 $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$, 无最小值, 则 B 错误; 对于 C, $f(x) = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ 的值域为 $\{y | y \neq 1\}$, 则 C 错误; 对于 D, $f(x) = \lg(\sqrt{x} + 1) \geq f(0) = 0$, 故 $f(x) = \lg(\sqrt{x} + 1)$ 有最小值 0, 则 D 正确. 故选 AD.
10. ACD 对于 A, 由 $(a + 2a + 3a + 3a + 5a + 6a) \times 10 = 1$, 得 $a = 0.005$, 故 A 正确; 对于 B, 估计成绩低于 60 分的有 $1000 \times (2a + 3a) \times 10 = 50000a = 250$ 人, 故 B 错误; 对于 C, 由众数的定义知, 估计这组数据的众数为

- 75,故 C 正确;对于 D,设这组数据的第 85 百分位数为 m ,则 $(90-m) \times 5 \times 0.005 + 0.005 \times 10 = 1 - 85\% = 0.15$,解得 $m = 86$,故 D 正确. 故选 ACD.
11. ABD 由 $a-b=2b\cos C$,可得 $\sin A - \sin B = 2\sin B\cos C$,即 $\sin(B+C) - 2\sin B\cos C = \sin B$,即有 $\sin C\cos B - \cos C\sin B = \sin(C-B) = \sin B$,因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,所以 $C-B=B$,即 $C=2B$,故 A 正确,C 错误;由 $0 < B < \frac{\pi}{2}$, $0 < 2B < \frac{\pi}{2}$,且 $A = \pi - B - C = \pi - 3B \in (0, \frac{\pi}{2})$,解得 $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{4}$,故 B 正确;而 $\frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin 2B}{\sin B} = 2\cos B \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$,故 D 正确. 故选 ABD.
12. ACD 对于 A,存在平面 $ABC \perp$ 平面 BCD ,使得 $AB \perp CD$,证明如下:因为平面 $ABC \perp$ 平面 BCD ,平面 $ABC \cap$ 平面 $BCD = BC$, $BC \perp CD$, $CD \subset$ 平面 BCD ,则 $CD \perp$ 平面 ABC ,因为 $AB \subset$ 平面 ABC ,所以 $AB \perp CD$,故存在平面 $ABC \perp$ 平面 BCD ,使 $AB \perp CD$,故 A 正确;对于 B,若 $AC \perp BD$,又 $AC \perp BA$, $AB \cap BD = B$, $AB, BD \subset$ 平面 ABD ,则 $AC \perp$ 平面 ABD ,因为 $AD \subset$ 平面 ABD ,则 $AC \perp AD$,则 $\triangle ACD$ 是以 CD 为斜边的直角三角形,因为 $CD=2$,所以 $BC = CD \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}$, $AC = BC \sin 45^\circ = \sqrt{6}$,又由题意知 $CD < AC$,故不存在某个位置,使 $AC \perp BD$,故 B 错误;对于 C,当三棱锥 $A-BCD$ 体积取得最大值时,平面 $ACB \perp$ 平面 BCD ,即 AE 是三棱锥 $A-BCD$ 的高,又 $CD \perp BC$,平面 $ACB \cap$ 平面 $BCD = BC$, $CD \subset$ 平面 BCD ,所以 $CD \perp$ 平面 ABC ,所以 $\angle DAC$ 是直线 AD 与平面 ABC 所成的角,所以 $\tan \angle DAC = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,故 C 正确;对于 D,当 $AB=AD$ 时,因为 F 为 BD 的中点,所以 $AF \perp BD$,则 $AF = \sqrt{6-4} = \sqrt{2}$,又因为 E 为 BC 的中点,所以 $EF = \frac{1}{2}CD = 1$,又 $AE = \sqrt{3}$,所以 $EF^2 + AF^2 = AE^2$,所以 $AF \perp EF$,如图将 $\triangle AEF$ 沿 AE 旋转,得到 $\triangle AEF'$,使其与 $\triangle ACB$ 在同一平面内且 F' 在 $\triangle AEB$ 内,则当 C, M, F' 三点共线时, $CM + FM = CM + F'M$ 最小,即 $CM + FM$ 的最小值为 CF' ,在 $\text{Rt}\triangle AEF'$ 中, $\sin \angle AEF' = \frac{AF'}{AE} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,则 $\cos \angle CEF' = \cos(\angle AEF' + \angle AEC) = -\sin \angle AEF' = -\frac{\sqrt{6}}{3}$,所以在 $\triangle CEF'$ 中,由余弦定理得 $CF' = \sqrt{1+3-2 \times 1 \times \sqrt{3} \times (-\frac{\sqrt{6}}{3})} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$,所以 $CM + FM$ 的最小值为 $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$,故 D 正确. 故选 ACD.



13. $\frac{3}{2}$ 因为在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD}$,所以 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$,即 $\lambda = \frac{3}{2}$.
14. 120 由题设,若 200 名学生志愿者中女生有 x 人,则 $\frac{x}{200} = \frac{30-12}{30}$,所以 $x = \frac{18}{30} \times 200 = 120$ 人.
15. $(-\infty, -6)$ 因为 $y = 3^{-x} - 3^x$, $y = -x$ 均为奇函数,且为 $\mathbf{R}$ 上的减函数,所以函数 $f(x)$ 为奇函数,在 $\mathbf{R}$ 上为减函数.由 $f(2a+3) + f(3-a) > 0$,得 $f(2a+3) > -f(3-a) = f(a-3)$,所以 $2a+3 < a-3$,解得 $a < -6$,即实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -6)$.
16. $\{-1\}$ 因为 $x \in (0, \pi)$, $\sin x > 0$,所以 $|f(x)| \leq 3 \Leftrightarrow -3\sin x \leq \cos 2x + a \leq 3\sin x \Leftrightarrow$



$\begin{cases} a \leq 3\sin x - \cos 2x, \\ a \geq -3\sin x - \cos 2x, \end{cases}$ 因为 $3\sin x - \cos 2x = 3\sin x + 2\sin^2 x - 1 > -1$, $-3\sin x - \cos 2x = 2\sin^2 x - 3\sin x$
 $-1 = 2\left(\sin x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{17}{8} < 2\left(0 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{17}{8} = -1$, 所以 $-1 \leq a \leq -1$, 故 $a = -1$, 所以 a 的取值集合
 为 $\{-1\}$.

17. 解: (1) 根据题意 $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $a = 2e_1 + \lambda e_2$, $b = e_1 - e_2$,

则 $a = (2, 0) + (0, \lambda) = (2, \lambda)$, $b = (1, 0) - (0, 1) = (1, -1)$.

因为 $a \parallel b$, 则有 $\frac{\lambda}{2} = \frac{-1}{1}$, 解得 $\lambda = -2$ 5 分

(2) 由 (1) 可知 $a = (2, -2)$, $c = (1, 2)$

设 a 与 c 的夹角为 θ ,

则 $\cos \theta = \frac{a \cdot c}{|a| \cdot |c|} = \frac{(2, -2) \cdot (1, 2)}{\sqrt{2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{-2}{2\sqrt{2} \times \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ 10 分

18. (1) 证明: 因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AD \subset$ 平面 $ABCD$, 故 $PA \perp AD$, 2 分

又 $AB \perp AD$, $PA \cap AB = A$, $PA, AB \subset$ 平面 PAB , 故 $AD \perp$ 平面 PAB 4 分

又 $AD \subset$ 平面 PAD , 故平面 $PAD \perp$ 平面 PAB 5 分

(2) 解: 因为平面 $OFE \parallel$ 平面 PAB , 平面 $OEF \cap$ 平面 $PBD = OE$, 平面 $PAB \cap$ 平面 $PBD = PB$,

所以 $PB \parallel OE$ 7 分

因为 $AD \parallel BC$, 且 $AD = 2BC$, 所以 $DO = 2OB$ 9 分

在 $\triangle PBD$ 中, 由 $PB \parallel OE$, $DO = 2OB$, 得 $DE = 2PE$, 11 分

即 $\frac{PE}{ED} = \frac{1}{2}$ 12 分

19. 解: (1) 设 $\triangle ABC$ 外接圆的直径为 $2R$, 由正弦定理得 $(a+b)(a-b) = c(a-c)$,

即 $b^2 = a^2 + c^2 - ac$ 3 分

由余弦定理的推论得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$.

又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

由正弦定理, 得 $\frac{b}{\sin B} = 2R$, 即 $2R = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 6 分

(2) 由 (1), 得 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 7 分

又 $b = 2$, $a = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, $b^2 = a^2 + c^2 - ac$,

所以 $3c^2 - 2\sqrt{6}c - 4 = 0$,

解得 $c = \frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{3}$, $c = \frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{3}$ (舍), 10 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1$ 12 分

20. 解: (1) 因为 $f\left(\frac{5\pi}{6} + x\right) + f\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) = 0$,



- 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{5\pi}{6}, 0)$ 对称, 2 分
- 则 $\omega \cdot \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$,
- 解得 $\omega = -\frac{1}{5} + \frac{6}{5}k, k \in \mathbf{Z}$ 5 分
- 又 $\omega > 0$, 故当 $k=1$ 时, ω 取得最小值 1. 6 分
- (2) 当 $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$ 时, $\frac{\pi}{6} \leq \omega x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{6}$, 8 分
- 因为函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上的值域为 $[1, 2]$, 所以 $\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}$, 解得 $1 \leq \omega \leq 2$.
- 所以 ω 的取值范围为 $[1, 2]$ 12 分
21. 解: (1) 若 $a=0$, 则 $f(x) = \log_2(2^{x-1} + \frac{1}{4})$,
- 令 $f(x) = x$, 得 $2^{x-1} + \frac{1}{4} = 2^x$, 解得 $x = -1$, 所以 $f(x)$ 的不动点为 -1 4 分
- (2) 因为函数 $f(x)$ 恰有两个不动点 x_1, x_2 , 所以 $f(x) = x$,
- 即 $a \cdot 2^{2x} - (a+1)2^x + a + \frac{1}{2} = 0$ 的两个实数根为 x_1, x_2 , 且 $0 < x_1 < x_2$ 6 分
- 令 $t = 2^x$, 所以 $a \cdot t^2 - (a+1)t + a + \frac{1}{2} = 0$ 有两个大于 1 的不等实根, 7 分
- 又 $a > 0$, 所以 $\begin{cases} \Delta = (a+1)^2 - 4a(a + \frac{1}{2}) > 0, \\ a - (a+1) + a + \frac{1}{2} > 0, \\ \frac{a+1}{2a} > 1, \end{cases}$ 10 分
- 解得 $\frac{1}{2} < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即正数 a 的取值范围为 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 12 分
22. 解: (1) 样本平均数 $\bar{x} = 0.02 \times 1.7 + 0.10 \times 1.8 + 0.24 \times 1.9 + 0.31 \times 2 + 0.2 \times 2.1 + 0.09 \times 2.2 + 0.04 \times 2.3 = 2$ (万元), 2 分
- 样本方差 $s^2 = 0.02 \times (1.7-2)^2 + 0.10 \times (1.8-2)^2 + 0.24 \times (1.9-2)^2 + 0.31 \times (2-2)^2 + 0.2 \times (2.1-2)^2 + 0.09 \times (2.2-2)^2 + 0.04 \times (2.3-2)^2 = 0.0174$ (万元²). 4 分
- (2) 方案一: $s = \sqrt{0.0174} = \frac{\sqrt{174}}{100} \approx 0.132$ (万元), $\Omega = [1.85, 2.15]$.
- 月收入落在区间 Ω 左侧收取费用约为 $(0.02 + 0.10) \times 50 \times 600 \div 10\,000 = 0.36$ (万元);
- 月收入落在区间 Ω 内收取费用约为 $(0.24 + 0.31 + 0.20) \times 50 \times 800 \div 10\,000 = 3$ (万元);
- 月收入落在区间 Ω 右侧收取费用约为 $(0.09 + 0.04) \times 50 \times 1\,000 \div 10\,000 = 0.65$ (万元).
- 因此这 50 人共收取费用约为 $0.36 + 3 + 0.65 = 4.01$ (万元). 10 分
- 方案二: 这 50 人共收取费用约为 $50 \times 0.04 \times 2 = 4$ (万元).
- 故方案一能收到更多的费用. 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线