参照秘密级管理★启用前

2021届高三模拟考试

试卷类型：A

数学试题

2021.04

本试卷满分150分．考试用时120分钟．

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考号等填写在答题卡和试卷指定位置上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

准考证号________ 姓名________ 学校________

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{x\mid y=\ln x\}$，$B=\{y\in\mathbf{Z}\mid y=2\sin x\}$，则 $A\cap B=$

A．$(0,2]$　　B．$[0,2]$

C．$\{1,2\}$　　D．$\{0,1,2\}$

2．命题“$\forall n\in\mathbf{N}$，$n^2-1\in\mathbf{Q}$”的否定为

A．$\forall n\in\mathbf{N}$，$n^2-1\notin\mathbf{Q}$　　B．$\forall n\notin\mathbf{N}$，$n^2-1\in\mathbf{Q}$

C．$\exists n\in\mathbf{N}$，$n^2-1\notin\mathbf{Q}$　　D．$\exists n\in\mathbf{N}$，$n^2-1\in\mathbf{Q}$

3．已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^{x+\ln 2}, & x\leqslant 0,\\ f(x-3), & x>0,\end{cases}$ 则 $f(2\,021)=$

A．$\dfrac{2}{e}$　　B．$2e$　　C．$\dfrac{2}{e^2}$　　D．$2e^2$

4．已知点 $(1,1)$ 在抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 上，则 C 的焦点到其准线的距离为

A．$\dfrac{1}{4}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．1　　D．2

5. 大数学家欧拉发现了一个公式：$e^{ix}=\cos x+i\sin x$，i 是虚数单位，e 为自然对数的底数．此公式被誉为“数学中的天桥”．根据此公式，$(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^{2\,022}=$

（注：底数是正实数的实数指数幂的运算律适用于复数指数幂的运算）

A. 1　　B. -1　　C. i　　D. $-i$

6. 若 $x^6=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+a_3(x+1)^3+\cdots+a_6(x+1)^6$，则 $a_3=$

A. 20　　B. -20　　C. 15　　D. -15

7. 医用口罩由口罩面体和拉紧带组成，其中口罩面体分为内、中、外三层．内层为亲肤材质（普通卫生纱布或无纺布），中层为隔离过滤层（超细聚丙烯纤维熔喷材料层），外层为特殊材料抑菌层（无纺布或超薄聚丙烯熔喷材料层）．根据国家质量监督检验标准，医用口罩的过滤率是重要的指标，根据长期生产经验，某企业在生产线状态正常情况下生产的医用口罩的过滤率 $x\sim N(0.937\,2,\ 0.013\,9^2)$．若 $x\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，则 $P(\mu-2\sigma<x\leqslant\mu+2\sigma)=0.954\,5$，$P(\mu-3\sigma<x\leqslant\mu+3\sigma)=0.997\,3$．$0.977\,25^{50}\approx0.316\,4$．有如下命题：

甲：$P(x\leqslant0.9)<0.5$；乙：$P(x<0.4)>P(x>1.5)$；丙：$P(x>0.978\,9)=0.001\,35$；

丁：假设生产状态正常，记 X 表示一天内抽取的 50 只口罩中过滤率大于 $\mu+2\sigma$ 的数量，则 $P(X\geqslant1)\approx0.6$．其中**假**命题是

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

8. 已知椭圆 C 与双曲线 $x^2-y^2=1$ 有相同的左焦点 F_1、右焦点 F_2，点 P 是两曲线的一个交点，且 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$．过 F_2 作倾斜角为 45°的直线交 C 于 A，B 两点（点 A 在 x 轴的上方），且 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AF_2}$，则 λ 的值为

A. $3+\sqrt{3}$　　B. $3+\sqrt{2}$　　C. $2+\sqrt{3}$　　D. $2+\sqrt{2}$

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分．

9. 已知 $a>0$，$b>0$，$a+b^2=1$，则

A. $a+b<\frac{5}{4}$　　B. $a-b>-1$　　C. $\sqrt{a}\cdot b\leqslant\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{a}}{b-2}\geqslant-\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. 已知函数 $f(x)=|\sin x|+\sqrt{3}|\sin(x-\frac{\pi}{2})|$，则

A. $f(x)$在$[\frac{\pi}{2},\pi]$上的最小值是 1

B. $f(x)$的最小正周期是$\frac{\pi}{2}$

C. 直线 $x=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$是 $f(x)$图象的对称轴

D. 直线 $y=\frac{2}{\pi}x$ 与 $f(x)$的图象恰有 2 个公共点

11. 列昂纳多·斐波那契(Leonardo Fibonacci，1170—1250 年)是意大利数学家，1202 年斐波那契在其代表作《算盘书》中提出了著名的“兔子问题”，于是得斐波那契数列，斐波那契数列可以如下递推的方式定义：用 $F(n)(n\in\mathbf{N}^*)$表示斐波那契数列的第 n 项，则数列$\{F(n)\}$满足：$F(1)=F(2)=1$，$F(n+2)=F(n+1)+F(n)$．斐波那契数列在生活中有着广泛的应用，美国 13 岁男孩 Aidan Dwyer 观察到树枝分叉的分布模式类似斐波那契数列，因此猜想可按其排列太阳能电池，找到了能够大幅改良太阳能科技的方法．苹果公司的 Logo 设计，电影《达芬奇密码》等，均有斐波那契数列的影子．下列选项正确的是

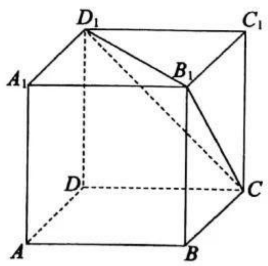
A. $[F(8)]^2=F(7)F(9)+1$

B. $F(1)+F(2)+\cdots+F(6)+1=F(8)$

C. $F(2)+F(4)+\cdots+F(2n)=F(2n+1)-2$

D. $[F(1)]^2+[F(2)]^2+\cdots+[F(n)]^2=F(n)\cdot F(n+1)$

12. 如图，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 P 是$\triangle B_1CD_1$ 内部(不包括边界)的动点．若 $BD\perp AP$，则线段 AP 长度的可能取值为



A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{6}{5}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知某地区中小学生人数和近视情况分别如图 1 和图 2 所示，为了解该地区中小学生的近视形成原因，用分层抽样的方法抽取 2%的学生进行调查，则抽取的高中生中近视人数为________.

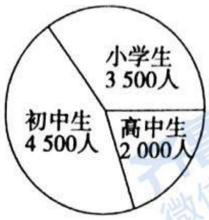


图1

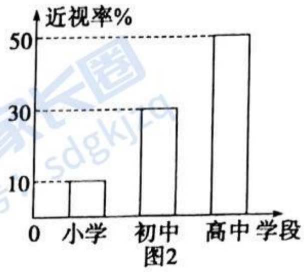
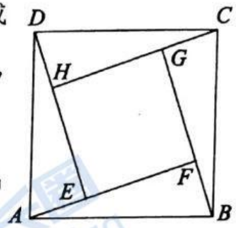


图2

14. 如图，由四个全等的三角形与中间的一个小正方形 $EFGH$ 拼成的一个大正方形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AE}$. 设 $\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，则 $x+y$ 的值为________.



15. 写出一个图象关于直线 $x=2$ 对称且在$[0, 2]$上单调递增的偶函数 $f(x)=$________.

16. 2020 年 11 月 23 日国务院扶贫办确定的全国 832 个贫困县全部脱贫摘帽，脱贫攻坚取得重大突破. 为了使扶贫工作继续推向深入，2021 年某原贫困县对家庭状况较困难的农民实行购买农资优惠政策.

(1)若购买农资不超过 2 000 元，则不给予优惠；

(2)若购买农资超过 2 000 元但不超过 5 000 元，则按原价给予 9 折优惠；

(3)若购买农资超过 5 000 元，不超过 5 000 元的部分按原价给予 9 折优惠，超过 5 000 元的部分按原价给予 7 折优惠.

该县家境较困难的一户农民预购买一批农资，有如下两种方案：

方案一：分两次付款购买，实际付款分别为 3 150 元和 4 850 元；

方案二：一次性付款购买.

若采取方案二购买这批农资，则比方案一节省________元.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=a_2=1$，且 $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$. 记 $b_n=a_{n+1}+a_n$，求证：

(1)$\{b_n\}$是等比数列；

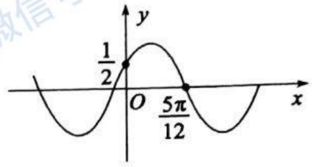
(2)$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n 满足 $\frac{b_2}{T_1 \cdot T_2}+\frac{b_3}{T_2 \cdot T_3}+\cdots+\frac{b_{n+1}}{T_n \cdot T_{n+1}}<\frac{1}{2}$.

18. （本小题满分 12 分）

若 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2})$的部分图象如图所示，$f(0)=\frac{1}{2}$，$f(\frac{5\pi}{12})=0$.

(1)求 $f(x)$的解析式；

(2)在锐角△ABC 中，若 $A>B$，$f(\frac{A-B}{2}-\frac{\pi}{12})=\frac{3}{5}$，求 $\cos\frac{A-B}{2}$，并证明 $\sin A>\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

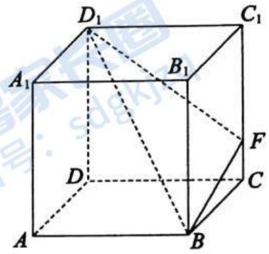


19. （本小题满分 12 分）

如图，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 F 在棱 CC_1 上，过 B，D_1，F 三点的正方体的截面 α 与直线 AA_1 交于点 E.

(1)找到点 E 的位置，作出截面 α(保留作图痕迹)，并说明理由；

(2)已知 $CF=a$，求 α 将正方体分割所成的上半部分的体积 V_1 与下半部分的体积 V_2 之比.



20. （本小题满分 12 分）

天问一号火星探测器于 2021 年 2 月 10 日成功被火星捕获，实现了中国在深空探测领域的技术跨越. 为提升探测器健康运转的管理水平，西安卫星测控中心组织青年科技人员进行探测器遥控技能知识竞赛，已知某青年科技人员甲是否做对每个题目相互独立，做对 A，B，C 三道题目的概率以及做对时获得相应的奖金如表所示.

题目	A	B	C
做对的概率	0.8	0.6	0.4
获得的奖金/元	1 000	2 000	3 000

规则如下：按照 A，B，C 的顺序做题，只有做对当前题目才有资格做下一题.

(1)求甲获得的奖金 X 的分布列及均值；

(2)如果改变做题的顺序，获得奖金的均值是否相同？如果不同，你认为哪个顺序获得奖金的均值最大？(不需要具体计算过程，只需给出判断)

21. (本题满分 12 分)

已知动点 M 与两个定点 $O(0,0)$，$A(3,0)$的距离的比为$\frac{1}{2}$，动点 M 的轨迹为曲线 C.

(1)求 C 的轨迹方程，并说明其形状；

(2)过直线 $x=3$ 上的动点 $P(3,p)(p\neq0)$分别作 C 的两条切线 PQ、PR(Q、R 为切点)，N 为弦 QR 的中点，直线 l：$3x+4y=6$ 分别与 x 轴、y 轴交于点 E、F，求 $\triangle NEF$ 的面积 S 的取值范围.

22. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=a\cos x+1-e^{\frac{\pi}{2}-x}$，且 $f'(\frac{\pi}{2})=0$.

(1)求实数 a 的值，并判断 $f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上的单调性；

(2)对确定的 $k\in N^*$，求 $f(x)$在$[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi]$上的零点个数.

2022届高三模拟考试

数学试题参考答案及评分标准　　2022．3

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．

CDDC　　ABBC

二、多项选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9．ABD　　10．AD　　11．ABD　　12．BCD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．2　　14．12π　　15．24　　16．$[\frac{1}{4},\ \frac{2}{3}]$

四、解答题：本题共6小题，共70分．

17．（本小题满分10分）．

解：由$S_n=2^{n+1}-\lambda$，得$a_1=4-\lambda$．……1分

当$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^{n+1}-\lambda)-(2^n-\lambda)=2^n$．……3分

于是，$a_1=4-\lambda$，$a_2=4$，$a_3=8$．……4分

由a_1，a_2，a_3成等比数列，得$a_1a_3={a_2}^2$，即$(4-\lambda)\cdot8=16$．

解得$\lambda=2$．……5分

当$\lambda=2$时，$a_1=2=2^1$．又$n\geqslant2$时，$a_n=2^n$．

可见，当$\lambda=2$时，$\{a_n\}$为等比数列．$\lambda=2$即为所求，且$a_n=2^n$．……6分

（2）$b_n=\frac{1}{a_n}+\log_2 a_n=\frac{1}{2^n}+n$．……7分

$$T_n=(\frac{1}{2}+1)+(\frac{1}{2^2}+2)+\cdots+[\frac{1}{2^{n-1}}+(n-1)]+(\frac{1}{2^n}+n)$$

$$=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n})+(1+2+\cdots+n)$$ ……8分

$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{(1+n)n}{2}=1-\frac{1}{2^n}+\frac{(1+n)n}{2}．$$ ……10分

18．解：（1）由 $b\sin\frac{B+C}{2}=a\sin B$ 及 $B+C=\pi-A$ 得

$\sin B\sin\frac{\pi-A}{2}=\sin A\sin B$，即 $\sin B\cos\frac{A}{2}=\sin A\sin B$． ……………………2 分

因为 $\sin B\neq 0$，所以 $\cos\frac{A}{2}=\sin A$，即 $\cos\frac{A}{2}=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$．

又 $\frac{A}{2}\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\cos\frac{A}{2}\neq 0$，所以 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$． ……………………3 分

所以 $\frac{A}{2}=\frac{\pi}{6}$，即 $A=\frac{\pi}{3}$． ……………………4 分

（2）由正弦定理，得 $\frac{a-c}{b}=\frac{\sin A-\sin C}{\sin B}$ ……………………5 分

$=\frac{\sin\frac{\pi}{3}-\sin(\frac{2\pi}{3}-B)}{\sin B}$ ……………………6 分

$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-(\sin\frac{2\pi}{3}\cos B-\cos\frac{2\pi}{3}\sin B)}{\sin B}$ ……………………8 分

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1-\cos B}{\sin B}-\frac{1}{2}$ ……………………9 分

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1-(1-2\sin^2\frac{B}{2})}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\frac{B}{2}-\frac{1}{2}$ ……………………10 分

因为 $0<B<\frac{2\pi}{3}$，所以 $0<\frac{B}{2}<\frac{\pi}{3}$，所以 $0<\tan\frac{B}{2}<\sqrt{3}$， ……………………11 分

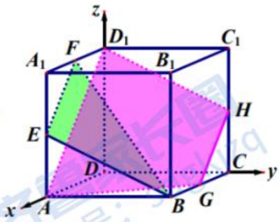
所以 $-\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\frac{B}{2}-\frac{1}{2}<1$．所以 $\frac{a-c}{b}$ 的取值范围是 $(-\frac{1}{2},1)$． ……………………12 分

19．（1）设 G，H 分别是棱 BC，CC_1 的中点，顺次连接 D_1，A，G，H，则四边形 D_1AGH 即为所求的截面． ……………………2 分

理由如下：因为点 G，H 分别是棱 BC，CC_1 的中点，故 $BC_1\,/\!/\,GH$．

又 $BC_1\,/\!/\,D_1A$，所以 $D_1A\,/\!/\,GH$．

而两平行直线确定一个平面，所以四边形 D_1AGH 为平面图形．……………3 分



因为点 E，F 分别是棱 AA_1，A_1D_1 的中点，

故 $D_1A // EF$．………………………………4 分

又 $D_1A \not\subset$ 平面 BEF，$EF \subset$ 平面 BEF，

所以 $D_1A //$ 平面 BEF．…………………5 分

因为 $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{D_1H}=\overrightarrow{D_1C_1}-\overrightarrow{HC_1}$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{D_1C_1}$，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{HC_1}$，

所以 $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{D_1H}$．

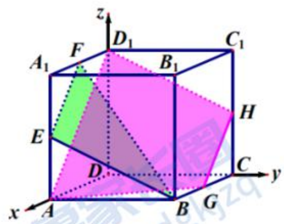
又 E，B，D_1，H 不共线，所以 $EB // D_1H$．…………………………………6 分

又 $D_1H \not\subset$ 平面 BEF，$EB \subset$ 平面 BEF，所以 $D_1H //$ 平面 BEF．……………7 分

又 $D_1A \cap D_1H = D_1$，$D_1A \subset$ 平面 D_1AGH，$D_1H \subset$ 平面 D_1AGH，

所以平面 $D_1AGH //$ 平面 BEF．……………………………………………………8 分

（2）解法 1：建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$．不妨设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，则 $B(2,2,0)$，$D_1(0,0,2)$，$A(2,0,0)$，$H(0,2,1)$．………………………9 分



故 $\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,2)$，$\overrightarrow{HD_1}=(0,-2,1)$．

设平面 $AGHD_1$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{HD_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+2z=0,\\ -2y+z=0.\end{cases}$

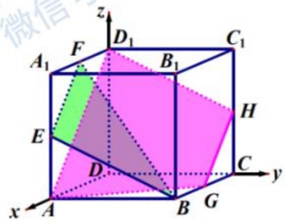
令 $z=2$，可得 $\boldsymbol{m}=(2,1,2)$．………………………………………………………10 分

又 $\overrightarrow{BD_1}=(-2,-2,2)$，所以 $\cos<\boldsymbol{m},\overrightarrow{BD_1}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD_1}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{BD_1}|}=\dfrac{-2}{3\times2\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{9}$．

故 BD_1 与该截面所在平面所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{9}$． ……………………………12 分

解法 2：BD_1 与该截面所在平面所成角的正弦值，即 BD_1 与平面 BEF 所成角的正弦值．

建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$．设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，则 $B(2,2,0)$，$D_1(0,0,2)$，$E(2,0,1)$，$F(1,0,2)$． ……………………………9 分



故 $\overrightarrow{BE}=(0,-2,1)$，$\overrightarrow{EF}=(-1,0,1)$．

设平面 BEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2y+z=0,\\ -x+z=0.\end{cases}$

令 $z=2$，可得 $\boldsymbol{m}=(2,1,2)$． ……………………………………………………10 分

又 $\overrightarrow{BD_1}=(-2,-2,2)$，所以 $\cos<\boldsymbol{m},\overrightarrow{BD_1}>=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD_1}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{BD_1}|}=\frac{-2}{3\times 2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{9}$．

故 BD_1 与平面 BEF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{9}$，即 BD_1 与该截面所在平面所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{9}$． ……………………………………………………12 分

20．（1）解：记事件 A 为“题目答对了”，事件 B 为“知道正确答案”，则 $P(A|B)=1$，$P(A|\overline{B})=\frac{1}{4}$，$P(B)=P(\overline{B})=\frac{1}{2}$． ……………………………………2 分

由全概率公式，$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$．……… 4 分

所求概率为 $P(B|A)=\frac{P(BA)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\times 1}{\frac{5}{8}}=\frac{4}{5}$．………………6 分

注：计算概率值时，给出公式占 1 分，代入数据并给出正确结果占 1 分．

（2）设事件 A_i 表示小明选择了 i 个选项，$i=1,2,3$．C 表示选到的选项都是正确的．

……………………………………………………………………………………7 分

解法1： 由互斥事件的概率加法公式，

$$P(X=0)=P(A_1\overline{C})+P(A_2\overline{C})+P(A_3\overline{C})$$

$$=P(A_1)P(\overline{C}|A_1)+P(A_2)P(\overline{C}|A_2)+P(A_3)P(\overline{C}|A_3)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{C_4^2})+\frac{1}{6}\times1=\frac{25}{36};$$ ……………………8分

$$P(X=2)=P(A_1C)=P(A_1)P(C|A_1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4};$$ ……………………9分

$$P(X=5)=P(A_2C)=P(A_2)P(C|A_2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{C_4^2}=\frac{1}{18}.$$ ……………………10分

随机变量 X 的分布列为

X	0	2	5
P	$\frac{25}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{18}$

……………………………………………………11分

$$E(X)=0\times\frac{25}{36}+2\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{18}=\frac{7}{9}.$$ ……………………12分

解法2： 设事件 A_i 表示小明选择了 i 个选项，$i=1,2,3$．C 表示选到的选项都是正确的．

……………………………………………………7分

$$P(X=2)=P(A_1C)=P(A_1)P(C|A_1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4};$$ ……………………8分

$$P(X=5)=P(A_2C)=P(A_2)P(C|A_2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{C_4^2}=\frac{1}{18}.$$ ……………………9分

$$P(X=0)=1-P(X=5)-P(X=2)=1-\frac{1}{18}-\frac{1}{4}=\frac{25}{36}.$$ ……………………10分

下同解法1.

21.（本小题满分12分）

（1） 因为动点 G 到点 $F(4,0)$ 的距离比到直线 $x+6=0$ 的距离小2，

所以点 G 到点 $F(4,0)$ 的距离和它到直线 $x=-4$ 的距离相等，……………………1分

点 G 的轨迹是以 $F(4,0)$ 为焦点，以直线 $x=-4$ 为准线的抛物线．……………2分

设抛物线方程为 $y^2=2px\ (p>0)$．由 $\frac{p}{2}=4$，得 $p=8$．

所以 G 的轨迹的方程为 $y^2=16x$．…………………………………………………… 4 分

（2）由题意，直线 MN 的方程为 $y=k_1(x-4)$．由题意 $k_1\neq 0$，$k_2\neq 0$，且 $k_1\neq k_2$．

由 $\begin{cases} y^2=16x \\ y=k_1(x-4) \end{cases}$ 消去 y 并整理得 $k_1^2x^2-(8k_1^2+16)x+16k_1^2=0$．

该方程的判别式 $\Delta_1=256(k_1^2+1)>0$．设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

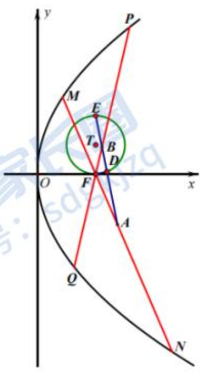
则 $x_1+x_2=\frac{8k_1^2+16}{k_1^2}=8+\frac{16}{k_1^2}$，$y_1+y_2=k_1(x_1-4)+k_1(x_2-4)=\frac{16}{k_1}$．

所以 $A(4+\frac{8}{k_1^2},\frac{8}{k_1})$．…………………………………………………… 6 分

同理 $B(4+\frac{8}{k_2^2},\frac{8}{k_2})$．$AB$ 的斜率 $k_{AB}=\dfrac{\frac{8}{k_2}-\frac{8}{k_1}}{(\frac{8}{k_2^2}+4)-(\frac{8}{k_1^2}+4)}=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$．………… 7 分

直线 AB 的方程为 $y=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}(x-4-\frac{8}{k_1^2})+\frac{8}{k_1}$

$=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}(x-4)+\frac{8}{k_1+k_2}=\frac{k_1k_2}{2}(x-4)+4$．………………… 8 分



下分两种方法：

法 1： 直线 AB 的方程为 $y=\frac{k_1k_2}{2}(x-4)+4$．

可见直线 AB 过定点 $E(4,4)$．……9 分

又 $FD\perp AB$，所以点 D 在以 EF 为直径的圆

$(x-4)^2+(y-2)^2=4$ 上．……… 11 分

故存在定点 $T\ (4,2)$，使得线段 TD 的长度为定值 2．

…………………………………… 12 分

法 2： 由题意，直线 FD 的方程为 $y=-\frac{2}{k_1k_2}(x-4)$.

令 $\frac{k_1k_2}{2}=t$，则直线 AB： $y=tx-4t+4$，

直线 FD： $y=-\frac{1}{t}(x-4)$.

联立 $\begin{cases}y=tx+4-4t,\\ y=-\frac{1}{t}(x-4),\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=4-\frac{4t}{t^2+1}\\ y=\frac{4}{t^2+1}.\end{cases}$ 所以点 $D(4-\frac{4t}{t^2+1}，\frac{4}{t^2+1})$.

……………………………………………………………………………………10 分

消去参量 t，可得 $(x-4)^2+y^2-4y=0$，即 $(x-4)^2+(y-2)^2=4$. ………11 分

所以点 D 在以 $(4,2)$ 为圆心，半径为 2 的圆上.

故存在定点 T $(4,2)$，使得线段 TD 的长度为定值 2． ……………………12 分

22.（1）解： $f'(x)=(x+1)e^x-a\cos x$． …………………………………………1 分

① 若 $a\leqslant 0$，当 $x\in[0,\pi]$ 时，$-a\geqslant 0$，$\sin x\geqslant 0$，$f(x)=xe^x+(-a)\sin x\geqslant(-a)\sin x\geqslant 0$，

当且仅当 $x=0$ 时取等号．可见，$a\leqslant 0$ 符合题意． ……………………………2 分

② 若 $0<a\leqslant 1$，当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$f'(x)\geqslant(x+1)e^0-a\cos x\geqslant 1-a\geqslant 0$；

当 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi]$ 时，$\cos x<0$，$f'(x)=(x+1)e^x+a\cdot(-\cos x)>0$.

可见，当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，当且仅当 $a=1$，且 $x=0$ 时取等号.

所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，所以 $f(x)\geqslant f(0)=0$.

所以 $0<a\leqslant 1$ 符合题意． ……………………………………………………4 分

③ 若 $a>1$，因为 $y=(x+1)e^x$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，$y=-a\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，

所以 $f'(x)=(x+1)e^x-a\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增． ……………………………5 分

或： 若 $a>1$，当 $x\in[0,\pi]$ 时，$\sin x\geqslant 0$，$f''(x)=(x+2)e^x+a\sin x\geqslant(x+2)e^x>0$，

所以 $f'(x)=(x+1)e^x-a\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增． ……………………………5 分

高三数学答案 第 7 页 共 8 页

又 $f'(0)=1-a<0$，$f'(\frac{\pi}{2})=(\frac{\pi}{2}+1)e^{\frac{\pi}{2}}>0$，由零点存在定理及 $f'(x)$ 的单调性，

存在唯一的 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $f'(x_0)=0$.

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<f'(x_0)=0$，$f(x)$ 单调递减，所以 $f(x)<f(0)=0$.

可见，$a>1$ 不符合题意. ……………………………………………………………… 6 分

综上，a 的取值范围是 $(-\infty,1]$. ………………………………………………………… 7 分

（2）① 若 $-59\leqslant a\leqslant 0$，由（1），$x\in(0，\pi]$ 时，$f(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,\pi]$ 内无零点.

当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时，$-1\leqslant\sin x<0$，$0<-\sin x\leqslant 1$，$-a\sin x\geqslant a$，

$f(x)=xe^x-a\sin x>\pi e^{\pi}+a>3e^3-59>3\times2.7^3-59=0.049>0$.

可见，若 $-59\leqslant a\leqslant 0$，$f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 内无零点. …………………………………… 9 分

② 若 $0<a\leqslant 1$，由（1），$x\in(0，\pi]$ 时，$f(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,\pi]$ 内无零点.

当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时，$-\sin x>0$，$f(x)=xe^x+a(-\sin x)>xe^x>0$.

可见，若 $0<a\leqslant 1$，$f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 内无零点. ……………………………………… 10 分

③ 若 $a>1$，由（1），存在唯一的 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<f'(x_0)=0$，

$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,\pi)$ 时，$f'(x)>f'(x_0)=0$，$f(x)$ 单调递增.

又 $f(0)=0$，所以 $f(x_0)<f(0)=0$.

又 $f(\pi)=\pi e^{\pi}>0$，由零点存在定理及 $f(x)$ 的单调性，存在唯一的 $x_1\in(x_0,\pi)$，使得

$f(x_1)=0$. 可见，$f(x)$ 在 $(0,\pi]$ 内存在唯一的零点.

当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时，$\sin x<0$，$-a\sin x>0$，所以 $f(x)=xe^x-a\sin x>xe^x>0$.

可见，$f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 有且仅有 1 个零点. ……………………………………………… 11 分

综上所述，若 $-59\leqslant a\leqslant 1$，$f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 内无零点；若 $a>1$，$f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 内有且仅有 1 个零点. ……………………………………………………………………………… 12 分

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。