2022届高三二轮复习联考(一) 新高考卷

数学试卷

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为120分钟，满分150分

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.集合$A=\{x|-1\leqslant x<2\}$，$B=\{x|x>1\}$，则$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$

A.$\{x|-1\leqslant x<1\}$　B.$\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$　C.$\{x|1\leqslant x<2\}$　D.$\{x|x<2\}$

2.在复平面内，复数$\frac{5i}{2+i}$对应的点坐标为

A.$(1,2)$　B.$(1,-2)$　C.$(-1,2)$　D.$(-1,-2)$

3.命题"$\exists x_0>0, x_0^2-2|x_0|<0$"的否定是

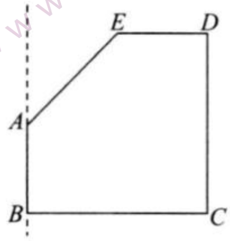
A.$\exists x_0>0, x_0^2-2|x_0|\geqslant 0$　B.$\exists x_0\leqslant 0, x_0^2-2|x_0|\geqslant 0$

C.$\forall x>0, x^2-2|x|\geqslant 0$　D.$\forall x\leqslant 0, x^2-2|x|\geqslant 0$

4.从3名高一学生，3名高二学生中选出3人，分别负责三项不同的任务，若这3人中至少有一名高二学生，则不同的选派方案共有

A. 54种　B.108种　C.114种　D.120种

5.如图，在平面五边形$ABCDE$中，$AB=DE=1$，$BC=CD=2$，$AE=\sqrt{2}$，$\angle ABC=\angle BCD=\angle CDE=90°$，则五边形$ABCDE$绕直线$AB$旋转一周所成的几何体的体积为



A.$\frac{20}{3}\pi$　B.7π

C.$\frac{22}{3}\pi$　D.$\frac{23}{3}\pi$

6.已知圆C的圆心在直线$l_1: x+2y-7=0$上，且与直线$l_2: x+2y-2=0$相切于点$M(-2,2)$，则圆C被直线$l_3: 2x+y-6=0$截得的弦长为

A.$2\sqrt{5}$　B.$\frac{4\sqrt{21}}{5}$　C.$\frac{2\sqrt{105}}{5}$　D.$\frac{6\sqrt{5}}{5}$

7.已知$(ax^2+1)\left(x-\frac{2}{x}\right)^5$的展开式中各项系数的和为$-3$，则该展开式中$x$的系数为

A.40　B.-40　C.-120　D.-240

8.某校有一社团专门研究密码问题，社团活动室用的也是一把密码锁，且定期更换密码，但密码的编写方式不变，都是以当日值班社员的姓氏为依据编码的，密码均为$\frac{100}{N}$的小数点后的前6位数字，编码方式如下：①x为某社员的首拼声母对应的英文字母在26个英文字母中的位置；②若x为偶数，则在正偶数数列中依次插入数值为3^n的项得到新数列$\{a_n\}$，即2，3，4，6，8，3^2，10，12，14，16，…；若x为奇数，则在正奇数数列中依次插入数值为2^n的项得到新数列$\{a_n\}$，即1，2，3，2^2，5，7，2^3，9，11，13，…；③N为数列$\{a_n\}$的前x项和．如当值社员姓康，则K在26个英文字母中排第11位，所以$x=11$，前11项中有2，2^2，2^3，所以有8个奇数，故$N=1+3+\cdots+15+2+2^2+2^3=78$，所以密码为282 051，若今天当值社员姓徐，则当日密码为

A.125 786　　B.199 600　　C.200 400　　D.370 370

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9.某区创建全国文明城市，指挥部办公室对所辖街道当月文明城市创建工作进行考评．工作人员在本区选取了甲、乙两个街道，并在这两个街道各随机抽取10个实地点位进行现场测评，下表是两个街道的测评分数(满分100分)，则下列说法错误的是

甲	75	79	82	84	86	87	90	91	93	98
乙	73	81	81	83	87	88	95	96	97	99

A.甲、乙两个街道的测评分数的极差相等

B.甲、乙两个街道的测评分数的平均数相等

C.街道乙的测评分数的众数为87

D.甲、乙两个街道测评分数的中位数中，乙的中位数较大

10.已知函数$f(x)=\sin(2\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度得到$g(x)$的图象，$g(x)$的图象关于$y$轴对称，若$f(x)$的相邻两条对称轴的距离是$\frac{\pi}{2}$，则下列说法正确的是

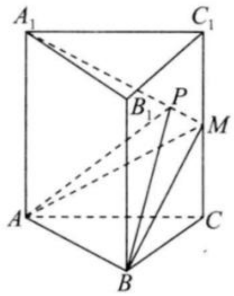
A.$g(x)=\cos 2x$

B.$f(x)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$

C.$f(x)$在$[0,\pi]$上的单调增区间是$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$，$\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$

D.函数$f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{17\pi}{12},0\right)$中心对称

11.如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\triangle ABC$是边长为2的正三角形，$AA_1=4$，M为CC_1的中点，P为线段A_1M上的点(不包括端点)，则下列说法正确的是



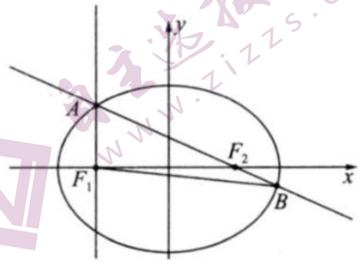
A.$A_1M\perp$平面ABM

B.三棱锥$P-ABM$的体积的取值范围是$\left(0,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

C.存在点P，使得BP与平面$A_1B_1C_1$所成的角为60°

D.存在点P，使得AP与BM垂直

12.已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2(如图),离心率为 $\frac{1}{2}$,过 F_1 的直线 AF_1 垂直于 x 轴,且在第二象限中交 E 于点 A,直线 AF_2 交 E 于点 B(异于点 A),则下列说法正确的是



A.若椭圆 E 的焦距为 2,则短轴长为 $4\sqrt{3}$

B.$\triangle ABF_1$ 的周长为 $4a$

C.若 $\triangle AF_1F_2$ 的面积为 12,则椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{24}=1$

D.$\triangle ABF_1$ 与 $\triangle AF_1F_2$ 的面积的比值为 $\frac{10}{7}$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13.已知 $f(x)=\begin{cases}e^x+1 & x\leqslant 0,\\ f(x-2) & x>0,\end{cases}$ 则 $f(3)$ 的值为________.

14.焦点在 x 轴上的双曲线 C 与双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ 有共同的渐近线,且 C 的焦点到一条渐近线的距离为 $3\sqrt{2}$,则双曲线 C 的方程为__________.

15.若 $a>0,b>0$ 且 $2ab=2a+b+3$,则 $2a+b$ 的最小值为__________.

16.已知函数 $f(x)=2-\frac{2}{e^x+1}$,若不等式 $f(ax)+f\left(2\ln\frac{1}{x}\right)\geqslant 2$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立,则实数 a 的取值范围为__________.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明步骤或演算步骤.

17.(10 分)为了研究人对红光或绿光的反应时间,某实验室工作人员在点亮红光或绿光的同时,启动计时器,要求受试者见到红光或绿光点亮时,就按下按钮,切断计时器,这就能测得反应时间.该试验共测 200 次红光,200 次绿光的反应时间,若以反应时间是否超过 0.4 s(s:秒)为标准,完成以下问题.

(1)完成下面的 2×2 列联表:

	反应时间不超过 0.4 s 次数	反应时间超过 0.4 s 次数	合计
红光次数	150		
绿光次数			
合计		130	

(2)根据(1)中的 2×2 列联表,判断是否有 99.5% 的把握认为反应时间是否超过 0.4 s 与光色有关.

参考公式与数据:$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中 $n=a+b+c+d$.

$P(\chi^2\geqslant k_0)$	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

18.(12 分)已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,满足 $a_1=1$,$S_7-12=6a_2+a_{10}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)记数列$\{a_n\cdot 2^{a_n+1}\}$的前 n 项和为 T_n,求满足$\dfrac{9T_n-20}{6n-5}>4\,096$的正整数 n 的最小值.

19.(12 分)已知在△ABC 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,$2\sin A\cos C-\sin B\cos C=\sin B-\cos A\sin C$,且 $C\neq\dfrac{\pi}{2}$,

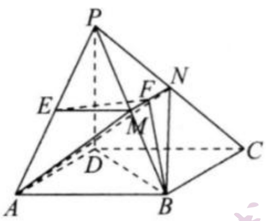
(1)若 $a=\sqrt{3}$,$S_{\triangle ABC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$,求 C;

(2)若$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=6$,求$\dfrac{\sqrt{2}a}{2}+c$ 的最大值.

20.(12 分)如图,四棱锥 $P-ABCD$ 中,$PD\perp$底面 $ABCD$,底面 $ABCD$ 为菱形,$AB=4$,$\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$,$PD=2$,$E$,$M$,$N$ 分别为棱 PA,PB,PC 的中点.F 为 MN 上的动点.

(1)求证:EF∥平面 $ABCD$;

(2)是否存在 F,使得平面 ABF 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角的余弦值为$\dfrac{4\sqrt{19}}{19}$,若存在,求出$\dfrac{MF}{MN}$,若不存在,请说明理由.



21.(12 分)已知抛物线 C:$x^2=2py$ 的焦点为 F,抛物线上一点 $A(m,2)(m>0)$到 F 的距离为 3.

(1)求抛物线 C 的方程和点 A 的坐标;

(2)设斜率为 k 的直线 l 过点 $B(2,0)$,且与抛物线 C 交于不同的两点 M,N,若$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BN}$,$\lambda\in\left(\dfrac{1}{4},4\right)$,求斜率 k 的取值范围.

22.(12 分)已知函数 $f(x)=\dfrac{a^2}{2}x^2-2\ln x-ax$,其中 $a\neq 0$.

(1)当 $a=1$ 时,求 $f(x)$的单调区间;

(2)当 $a^2>1$ 时,是否存在实数 a 使得函数 $f(x)$的最小值为$-a^2+a+2$,若存在,求出 a 的值,若不存在,请说明理由.

2022 届高三二轮复习联考(一)　新高考卷

数学参考答案及评分意见

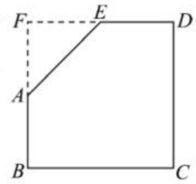
1.B 【解析】$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid x\leqslant 1\}$，所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，故选 B.

2.A 【解析】$\frac{5i}{2+i}=\frac{5i(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{5(1+2i)}{5}=1+2i$，在复平面内对应的点坐标为(1，2).故选 A.

3.C 【解析】$\forall x>0,x^2-2|x|\geqslant 0$.故选 C.

4.C 【解析】$A_6^3-A_3^3=114$，故选 C.

5.D 【解析】由图可知，五边形 $ABCDE$ 可看作正方形 $BCDF$ 切去一个等腰直角三角形 AEF，得到的几何体是一个圆柱挖去一个圆锥，设圆柱和圆锥的体积分别为 V_1,V_2，所以 $V=V_1-V_2=\pi R^2h-\frac{1}{3}\pi r^2h'=4\pi\cdot 2-\frac{1}{3}\pi\cdot 1=\frac{23}{3}\pi$.故选 D.



6.D 【解析】设圆心为(a,b)，则有 $a+2b-7=0,\frac{|a+2b-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}$，解得 $a=-1,b=4$，则圆心为$(-1,4)$，

半径 $r=\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}=\sqrt{5}$，

则圆心到直线 $2x+y-6=0$ 距离 $d=\frac{|-2+4-6|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，则弦长$=2\sqrt{r^2-d^2}=2\times\sqrt{5-\frac{16}{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$，故选 D.

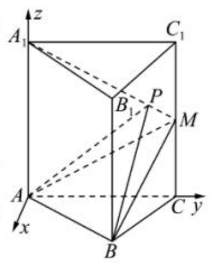
7.C 【解析】令 $x=1$ 得$(a+1)(1-2)^5=-3$，解得 $a=2$，$\left(x-\frac{2}{x}\right)^5$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^rx^{5-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r=(-2)^rC_5^rx^{5-2r}$，令 $5-2r=-1$ 得 $r=3$，令 $5-2r=1$ 得 $r=2$，则$(2x^2+1)\left(x-\frac{2}{x}\right)^5$ 的展开式中 x 的系数为 $2\times(-2)^3C_5^3+(-2)^2C_5^2=-120$.故选 C.

8.B 【解析】X 在 26 个英文字母中排第 24 位，所以 $x=24$，前 24 项中有 $3,3^2,3^3$，所以有 21 个偶数，故 $N=2+4+\cdots+42+3+3^2+3^3=\frac{(2+42)\times 21}{2}+39=501$，$\frac{100}{501}$的小数点后的前 6 位数字为 199 600.故选 B.

9.ABC 【解析】街道甲的测评分数的极差是 $98-75=23$，街道乙的测评分数的的极差是 $99-73=26$，两者不相等，故 A 错误；街道甲的测评分数的平均数为 86.5，街道乙的测评分数的平均数为 88，故 B 错误；街道乙的测评分数的众数为 81，故 C 错误；街道甲的测评分数的中位数为 86.5，街道乙的测评分数的中位数为 87.5，故 D 正确，故选 ABC.

10.AD 【解析】由 $f(x)$的相邻两条对称轴的距离是 $\frac{\pi}{2}$，则 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，故 B 错误；$\omega=1$，$f(x)=\sin(2x+\varphi)$，所以 $g(x)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\varphi\right]=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)$，因为函数 $g(x)$的图像关于 y 轴对称，$\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$，因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，则 $g(x)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos 2x$，故 A 正确；$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 得 $k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，令 $k=0$ 得 $-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$，$k=1$ 得 $\frac{5\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{4\pi}{3}$，$\therefore f(x)$在$[0,\pi]$上的单调增区间是$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$，$\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$，故 C 错误；$f\left(-\frac{17\pi}{12}\right)=\sin\left(-\frac{17\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin(-3\pi)=0$，则函数 $f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{17\pi}{12},0\right)$中心对称.故选 AD.

11.BC 【解析】由题意得 $A_1C_1=MC_1=2$，则 $A_1M=2\sqrt{2}$，$BM=2\sqrt{2}$，易得 $A_1B=2\sqrt{5}$，所以 A_1M 与 BM 不垂直，故 A 错误；$V_{P-ABM}=V_{B-AMP}$，点 B 到平面 AMP 的距离为$\sqrt{3}$，由 $AM\perp A_1M$ 得 $S_{\triangle AMP}=\frac{1}{2}\times AM\times PM=\sqrt{2}PM$，因为 $PM\in(0,2\sqrt{2})$，则 $V_{P-ABM}=V_{B-AMP}=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times S_{\triangle AMP}=\frac{\sqrt{6}}{3}PM\in\left(0,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$，故 B 正确；$BP$ 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成的角即为 BP 与平面 ABC 所成的角，设为 α，易知当点 P 与 M 重合时，α 最小，此时 $\alpha=\angle MBC=45^\circ$，当点 P 与 A_1 重合时，α 最大，此时 $\alpha=\angle ABA_1$，$\tan\alpha=\frac{AA_1}{AB}=2$，此时$\alpha>60^\circ$，



故存在点 P，使得 BP 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成的角为 60°，C 正确；如图建立空间直角坐标系，$B(\sqrt{3},1,0)$，$M(0,2,2)$，$A_1(0,0,4)$，设

$\overrightarrow{A_1P}=\lambda\overrightarrow{A_1M}$,$(0<\lambda<1)$,则有 $P(0,2\lambda,4-2\lambda)$,$\overrightarrow{AP}=(0,2\lambda,4-2\lambda)$,$\overrightarrow{BM}=(-\sqrt{3},1,2)$,$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BM}=8-2\lambda\neq0$,故不存在点 P,使得 AP 与 BM 垂直,故 D 错误.故选 BC.

12.BCD 【解析】若椭圆 E 的焦距为 2,则 $c=1$,由离心率 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,则 $a=2$,所以 $b=\sqrt{3}$,则则短轴长为 $2\sqrt{3}$,故 A 错误;$\triangle ABF_1$ 的周长为 $4a$,故 B 正确;设 $a=2c$,$b=\sqrt{3}c$,所以椭圆的方程可写为 $\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$,易知 $A(-c,\frac{3}{2}c)$,则 $S_{\triangle AF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2||AF_1|=\frac{3}{2}c^2$,则 $\frac{3}{2}c^2=12$,所以 $c=2\sqrt{2}$,$a=4\sqrt{2}$,$b=2\sqrt{6}$,则椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{24}=1$,故 C 正确;因为 $|AF_1|=\frac{3}{2}c$,所以 $|AF_2|=2a-\frac{3}{2}c=\frac{5}{2}c$,过点 B 作 $BH\perp x$ 轴,则 $\triangle BHF_2\backsim\triangle AF_1F_2$,$\frac{|AF_1|}{|BH|}=\frac{|F_1F_2|}{|HF_2|}=\frac{|AF_2|}{|BF_2|}$,即 $\frac{\frac{3}{2}c}{|BH|}=\frac{2c}{|HF_2|}=\frac{\frac{5}{2}c}{|BF_2|}$,设 $|BH|=3k$,$|HF_2|=4k$,$|BF_2|=5k$,则 $B(4k+c,-3k)$,代入椭圆方程 $\frac{(4k+c)^2}{4c^2}+\frac{(-3k)^2}{3c^2}=1$,整理得 $28k^2+8kc-3c^2=0$,解得 $k=\frac{3}{14}c$ 或 $k=-\frac{1}{2}c$(舍),所以 $\frac{S_{\triangle ABF_1}}{S_{\triangle AF_1F_2}}=\frac{S_{\triangle AF_1F_2}+S_{\triangle BF_1F_2}}{S_{\triangle AF_1F_2}}=\frac{\frac{1}{2}|F_1F_2|(|AF_1|+|BH|)}{\frac{1}{2}|F_1F_2||AF_1|}=\frac{\frac{3}{2}c+3k}{\frac{3}{2}c}=\frac{10}{7}$.故选 BCD.

13.$\frac{1}{e}+1$ 【解析】$f(3)=f(1)=f(-1)=\frac{1}{e}+1$.

14.$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{18}=1$ 【解析】由题意可设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=\lambda(\lambda>0)$,即 $\frac{x^2}{4\lambda}-\frac{y^2}{9\lambda}=1$

又因为焦点到渐近线的距离为 $3\sqrt{2}$,所以 $\sqrt{9\lambda}=3\sqrt{2}$,解得 $\lambda=2$,所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{18}=1$.

15.6 【解析】$2a+b\geqslant2\sqrt{2ab}$,则 $2ab\leqslant\frac{(2a+b)^2}{4}$,当且仅当 $b=2a$ 时等号成立,则 $2a+b+3\leqslant\frac{(2a+b)^2}{4}$,设 $x=2a+b>0$,

则有 $x^2-4x-12\geqslant0$,解得 $x\geqslant6$,即 $2a+b$ 的最小值为 6,当且仅当 $a=\frac{3}{2}$,$b=3$ 时取等号.

16.$\left[\frac{2}{e},+\infty\right)$ 【解析】因为 $f(x)+f(-x)=2-\frac{2}{e^x+1}+2-\frac{2}{e^{-x}+1}=4-\frac{2}{e^x+1}-\frac{2e^x}{1+e^x}=2$,所以 $f(x)=2-f(-x)$,所以 $f(ax)\geqslant2-f(-2\ln x)=f(2\ln x)$,又 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数,所以有 $ax\geqslant2\ln x$,对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立,即 $a\geqslant2\frac{\ln x}{x}$,设 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$,则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,则当 $x\in(0,e)$ 时 $h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增,当 $x\in(e,+\infty)$ 时 $h'(x)<0$,$h(x)$ 单调递减,则 $h(x)\leqslant h(e)=\frac{1}{e}$,所以有 $a\geqslant\frac{2}{e}$,即 $a\in\left[\frac{2}{e},+\infty\right)$.

17.【解析】(1)根据题意,可得 2×2 的列联表:

	反应时间不超过 0.4 s 次数	反应时间超过 0.4 s 次数	合计
红光次数	150	50	200
绿光次数	120	80	200
合计	270	130	400

…………………………………… (5 分)

(2)因为 $K^2=\frac{400\times(150\times80-120\times50)^2}{200\times200\times270\times130}\approx10.256>7.879$,…………………………………… (8 分)

所以有 99.5%的把握认为反应时间是否超过 0.4 s 与光色有关. …………………………………… (10 分)

18.【解析】(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,因为 $a_1=1$,且 $S_7-12=6a_2+a_{10}$,所以 $7a_1+21d-12=7a_1+15d$,……………… (3 分)

解得 $d=2$,所以 $a_n=2n-1$; …………………………………… (5 分)

(2)由 $a_n=2n-1$,可设 $b_n=a_n\cdot2^{a_n+1}=(2n-1)2^{2n}=(2n-1)4^n$, …………………………………… (6 分)

$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=4+3\times4^2+5\times4^3+\cdots+(2n-1)4^n$,①

$4T_n=4^2+3\times4^3+5\times4^4+\cdots+(2n-1)4^{n+1}$, ② …………………………………… (8 分)

①—②得，$-3T_n=4+2(4^2+4^3+\cdots+4^n)-(2n-1)4^{n+1}=\frac{(-6n+5)4^{n+1}-20}{3}$，

所以 $T_n=\frac{(6n-5)4^{n+1}+20}{9}$，…………（10分）

代入 $\frac{9T_n-20}{6n-5}>4\,096$，得 $4^{n+1}>4\,096=4^6$，化简得 $n>5$，…………（11分）

所以正整数 n 的最小值为6. …………（12分）

19.【解析】(1) $2\sin A\cos C-\sin B\cos C=\sin B-\cos A\sin C=\sin(A+C)-\cos A\sin C=\sin A\cos C$，则有 $(\sin A-\sin B)\cos C=0$，因为 $C\neq\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin A=\sin B$，由正弦定理得 $a=b$，则有 $a=b=\sqrt{3}$，…………（3分）

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{3}{2}\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，…………（5分）

因为 $0<C<\pi$ 且 $C\neq\frac{\pi}{2}$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$. …………（6分）

(2)设 BC 中点为 M，则 $|2\overrightarrow{AM}|=6$，即 $AM=3$.

在△ABM 中，由余弦定理，

可得 $c^2=AM^2+BM^2-2AM\cdot BM\cos\angle AMB=9+\left(\frac{a}{2}\right)^2-3a\cos\angle AMB$，…………（8分）

在△ACM 中，由余弦定理，

可得 $b^2=AM^2+CM^2-2AM\cdot CM\cos\angle AMC=9+\left(\frac{a}{2}\right)^2-3a\cos\angle AMC$，…………（9分）

因为 $\angle AMB=\pi-\angle AMC$，所以 $\cos\angle AMB=-\cos\angle AMC$，

两式相加，可得 $b^2+c^2=18+\frac{a^2}{2}$，因为 $a=b$，则有 $\frac{a^2}{2}+c^2=18$，…………（10分）

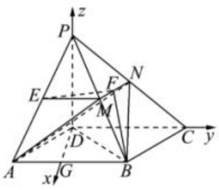
即 $\frac{\sqrt{2}a}{2}+c=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}+c\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{2}+c^2+\sqrt{2}ac}=\sqrt{18+\sqrt{2}ac}$，又因为 $18=\frac{a^2}{2}+c^2\geqslant 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}ac=\sqrt{2}ac$，

所以 $\frac{\sqrt{2}a}{2}+c\leqslant\sqrt{18+18}=6$，当且仅当 $\frac{\sqrt{2}}{2}a=c$ 时取等号，故 $\frac{\sqrt{2}a}{2}+c$ 的最大值为6. …………（12分）

20.【解析】(1)证明：因为 E，M 为 PA，PB 的中点，则 $EM/\!/AB$，又 $EM\not\subset$ 平面 $ABCD$，则 $EM/\!/$ 平面 $ABCD$，同理可得 $MN/\!/$ 平面 $ABCD$，又因为 $EM\cap MN=M$，所以平面 $EMN/\!/$ 平面 $ABCD$ …………（4分）

$EF\subset$ 平面 EMN，所以 $EF/\!/$ 平面 $ABCD$. …………（5分）

(2)设 AB 中点为 G，易知 $DG\perp DC$，以 D 为原点，直线 DG，DC，DP 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，如图所示，则 $A(2\sqrt{3},-2,0)$，$B(2\sqrt{3},2,0)$，$C(0,4,0)$，$P(0,0,2)$，$M(\sqrt{3},1,1)$，$N(0,2,1)$，$\overrightarrow{MN}=(-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{AB}=(0,4,0)$，设 $\overrightarrow{MF}=\lambda\overrightarrow{MN}$，$(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则有 $F(\sqrt{3}(1-\lambda),1+\lambda,1)$，$\overrightarrow{BF}=(-\sqrt{3}(1+\lambda),\lambda-1,1)$ …………（7分）



平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，设平面 ABF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$

可得 $\boldsymbol{n}=(1,0,\sqrt{3}(1+\lambda))$ …………（9分）

则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\sqrt{3}(1+\lambda)}{1\times\sqrt{1+3(1+\lambda)^2}}=\frac{4\sqrt{19}}{19}$，化简得 $(1+\lambda)^2=\frac{16}{9}$，

解得 $\lambda=\frac{1}{3}$ …………（11分）

所以存在 F，满足条件，此时 $\frac{MF}{MN}=\frac{1}{3}$. …………（12分）

21.【解析】(1)由题意知 $2+\frac{p}{2}=3$，得 $p=2$，所以抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$. …………（2分）

将点 $A(m,2)(m>0)$ 代入 $x^2=4y$，得 $m=2\sqrt{2}$。所以点 A 的坐标为 $(2\sqrt{2},2)$。 …………（4分）

(2)直线 $l:y=k(x-2)$ 与抛物线 $C:x^2=4y$ 联立，消去 y 得 $x^2-4kx+8k=0$。$\Delta=16k^2-32k>0$，解得 $k<0$ 或 $k>2$。 ……（6分）

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则有 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=8k$。$\overrightarrow{BM}=(x_1-2,y_1)$，$\overrightarrow{BN}(x_2-2,y_2)$，则 $y_1=\lambda y_2$，即 $\lambda=\frac{y_1}{y_2}$。

因为 $x_1^2=4y_1$，$x_2^2=4y_2$，所以 $\lambda=\frac{x_1^2}{x_2^2}=\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2\in\left(\frac{1}{4},4\right)$，则 $\frac{x_1}{x_2}\in\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},2\right)$ …………（8分）

因为 $\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+2=\frac{16k^2}{8k}=2k$，设 $t=\frac{x_1}{x_2}$，则 $2k=t+\frac{1}{t}+2$，

因为 $t\in\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},2\right)$，则 $t+\frac{1}{t}\in\left(-\frac{5}{2},-2\right]\cup\left[2,\frac{5}{2}\right)$ …………（10分）

所以 $k\in\left(-\frac{1}{4},0\right]\cup\left[2,\frac{9}{4}\right)$ …………（11分）

又因为 $k<0$ 或 $k>2$，所以 k 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{4},0\right)\cup\left(2,\frac{9}{4}\right)$。 …………（12分）

22.**【解析】**(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$， …………（1分）

当 $a=1$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}x^2-2\ln x-x$，$f'(x)=x-\frac{2}{x}-1=\frac{x^2-x-2}{x}=\frac{(x-2)(x+1)}{x}$ …………（2分）

当 $x\in(0,2)$ 时 $f'(x)<0$，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

则 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,2)$，单调递增区间 $(2,+\infty)$。 …………（4分）

(2) $f(x)=\frac{a^2}{2}x^2-2\ln x-ax$，

$f'(x)=a^2x-\frac{2}{x}-a=\frac{a^2x^2-ax-2}{x}=\frac{(ax-2)(ax+1)}{x}$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-\frac{1}{a}$ 或 $x=\frac{2}{a}$， …………（6分）

①若 $a>0$，由 $a^2>1$ 得 $a>1$，$-\frac{1}{a}<0$，$\frac{2}{a}>0$，故当 $x\in\left(0,\frac{2}{a}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{2}{a}\right)$ 单调递减；当 $x\in\left(\frac{2}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $\left(\frac{2}{a},+\infty\right)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{2}{a}\right)=2\ln\frac{a}{2}$，令 $2\ln\frac{a}{2}=-a^2+a+2$，设 $h(a)=2\ln\frac{a}{2}+a^2-a-2$，$h'(a)=\frac{2}{a}+2a-1=\frac{2a^2-a+2}{a}$，因为 $2a^2-a+2=2\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}>0$，所以 $h'(a)>0$，$h(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，且 $h(2)=0$，所以当 $a=2$ 时满足条件。 …………（9分）

②若 $a<0$，由 $a^2>1$ 得 $a<-1$，$-\frac{1}{a}>0$，$\frac{2}{a}<0$，故当 $x\in\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 单调递减；

当 $x\in\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(-\frac{1}{a}\right)=2\ln(-a)+\frac{3}{2}$。令 $2\ln(-a)+\frac{3}{2}=-a^2+a+2$，设 $m(a)=2\ln(-a)+a^2-a-\frac{1}{2}$，

$m'(a)=\frac{2}{a}+2a-1=\frac{2a^2-a+2}{a}$，因为 $2a^2-a+2=2\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}>0$，所以 $m'(a)<0$，$m(a)$ 在 $(-\infty,-1)$ 单调递减，

所以当 $a<-1$ 时，$m(a)>m(-1)=\frac{3}{2}>0$，不存在 a 使得 $m(a)=0$。 …………（11分）

综上所述，当 $a=2$ 时满足条件。 …………（12分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。