江西红色十校9月联考·高三数学

参考答案、提示及评分细则

1. B　因为集合 $A=\{x|0<x-1<7\}=\{x|1<x<8\}$，$B=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，所以 $A\cap B=\{3,5,7\}$，所以 $A\cap B$ 的真子集个数为 $2^3-1=7$. 故选 B.

2. D　这组数据共 21 个数据，$21\times75\%=15.75$，所以按从小到大第 16 个数据 9 是这组数据的 75%分位数. 故选 D.

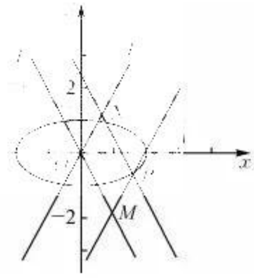
3. B　设等比数列的公比为 q，因为 $a_5-a_3=12$，所以 $a_6-a_4=q(a_5-a_3)$，所以 $q=2$，又 $a_1q^4-a_1q^2=12$，所以 $12a_1=12$，解得 $a_1=1$，所以 $a_{2\,024}=2^{2\,023}$. 故选 B.

4. A　由题知 $\tan\theta=-\frac{1}{3}$，$\cos\theta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，所以 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\frac{4}{5}$，所以 $\tan\theta\cdot\cos 2\theta=-\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}=-\frac{4}{15}$. 故选 A.

5. D　由 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，得 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=0$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$，设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $2\cos\theta=-1$，即 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$，又 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $\theta=\frac{2\pi}{3}$，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$. 故选 D.

6. B　因为函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的极大值与极小值之差为 2，所以 $A=1$，因为 $f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立，$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=0$，且 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递减，所以最小正周期为 $\frac{2\pi}{\omega}=T=4\times\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=2\pi$，解得 $\omega=1$，所以 $f(x)=\sin(x+\varphi)$，所以 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=1(0<\varphi<\pi)$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$. [illegible]正周期[illegible]的一个[illegible]

7. [illegible]



1，所以 $y_0^2=1-\frac{x_0^2}{4}$，所以 $|MN|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{\frac{y_0^2}{4}+4x_0^2}=\sqrt{\frac{63}{16}x_0^2+\frac{1}{4}}$，因为 $-2\leqslant x_0\leqslant2$，所以 $0\leqslant x_0^2\leqslant4$，$|MN|_{\max}=4$. 故选 A.

8. C　$f'(x)=2a-\frac{1}{x+1}$，因为切点坐标为 $(0,0)$，且切线方程的斜率等于切点处导函数值，所以 $2a-1=2$，解得 $a=\frac{3}{2}$，所以 $f(x)=3x-\ln(x+1)$，所以 $f'(x)=3-\frac{1}{x+1}=\frac{3x+2}{x+1}(x>-1)$，当 $-1<x<-\frac{2}{3}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>-\frac{2}{3}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f\left(-\frac{2}{3}\right)=-2-\ln\frac{1}{3}=-2+\ln 3<0$，又 $x\to-1$ 时，$f(x)\to+\infty$，$f(1)=3-\ln 2>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$ 和 $\left(-\frac{2}{3},+\infty\right)$ 上各有 1 个零点，所以 $f(x)$ 的零点个数为 2. 故选 C.

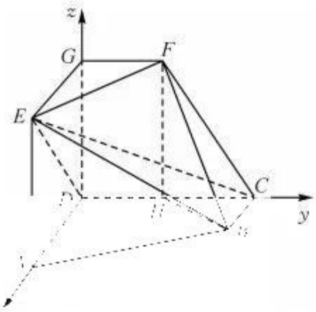
9. AC　复数 $z=\frac{3+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}^{2\,024}-\mathrm{i}}=\frac{3+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(3+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}$，在复平面内复数 z 所对应的点 $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$ 位于第一象限，故 A 正确；$\bar{z}=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\mathrm{i}$，故 B 错误；$z\cdot\bar{z}=\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{13}{2}$，故 C 正确；$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}}{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\mathrm{i}}=\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\mathrm{i}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}\right)}=\frac{-6+\frac{5}{2}\mathrm{i}}{\frac{13}{2}}=-\frac{12}{13}+\frac{5}{13}\mathrm{i}$，故 D 错误. 故选 AC.

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

10. BCD　对于 A，$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=(\frac{1}{x}+\frac{2}{y})(x+y)=3+\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}\geqslant 3+2\sqrt{2}$，当且仅当$\frac{y}{x}=\frac{2x}{y}$，即 $x=\sqrt{2}-1$，$y=2-\sqrt{2}$时等号成立，故 A 错误；对于 B，$np=2$，$np(1-p)=1$，解得 $p=\frac{1}{2}$，故 B 正确；对于 C，"$a+b>0$，$ab>0$"等价于"$a>0$，$b>0$"，故 C 正确；对于 D，$\neg p$：$\exists x_0, y_0\in\mathbf{R}$，$x_0^2+y_0^2<0$，故 D 正确. 故选 BCD.

11. ACD　由题知$\frac{p}{2}+1=2$，解得 $p=2$，所以抛物线 C：$y^2=4x$ 的准线方程为 $x=-1$，故 A 正确；将点 $P(1,m)$代入 C，得 $m=-2$(舍正)，又抛物线 C 的焦点坐标为 $F(1,0)$，所以点 F 到直线 l：$y=x-2$ 的距离为 $d=\frac{|1-0-2|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 B 错误；联立$\begin{cases}y^2=4x,\\ y=x-2,\end{cases}$消去 x 并整理得 $y^2-4y-8=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，所以 $y_1+y_2=4$，$y_1y_2=-8$，所以 $x_1x_2=\frac{1}{16}(y_1y_2)^2=4$，所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=4-8=-4$，所以$\angle AOB$ 为钝角，所以$\triangle AOB$ 是钝角三角形，故 C 正确；由弦长公式，得$|AB|=\sqrt{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}=\sqrt{2}\times\sqrt{16+32}=4\sqrt{6}$，故 D 正确. 故选 ACD.

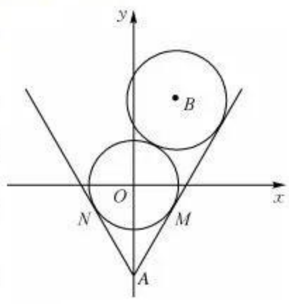
12. AD　对于 A，因为四边形 $ADGE$ 是正方形，所以 $DG\perp AD$，因为 $CD\perp$平面 $ADGE$，所以 $CD\perp DG$，又 $AD\cap CD=D$，所以 $DG\perp$平面 $ABCD$，所以 $DG\perp AB$，故 A 正确；对于 B，因为 $AD/\!/BC$，$AD/\!/EG$，所以 $EG/\!/BC$，所以$\angle CBF$ 即为异面直线 BF 与 EG 所成角(或其补角)，过点 F 作 $FH\perp CD$ 于点 H，连接 BH，则 $FH=2$，$BH=\sqrt{2}$，所以 $BF=\sqrt{4+2}=\sqrt{6}$，由选项 A 同理可得 $AD\perp$平面 $CDGF$，所以 $BC\perp$平面 $CDGF$，所以 BC $\perp CF$，[illegible] 分别以 DA，[illegible] 直线 [illegible] 平面 BEF 所成角的正弦值不是[illegible]，故 C 错误；对于 D，在$\triangle BEF$ 中，$BE=3$，$BF=\sqrt{6}$，$EF=\sqrt{5}$，所以 $\cos\angle BFE=\frac{5+6-9}{2\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{30}}{30}$，所以 $\sin\angle BFE=\frac{\sqrt{870}}{30}$，所以 $S_{\triangle BFE}=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{870}}{30}=\frac{\sqrt{29}}{2}$，又 $CE=2\sqrt{3}$，直线 CE 与平面 BEF 所成角的正弦值是$\frac{\sqrt{87}}{87}$，所以点 C 到平面 BEF 的距离为 $2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{87}}{87}=\frac{2\sqrt{29}}{29}$，所以 $V_{ABCDGEF}=V_{E\text{-}ABCD}+V_{E\text{-}CDGF}+V_{C\text{-}BEF}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(1+2)\times2\times2+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(1+2)\times2\times2+\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{29}}{2}\times\frac{2\sqrt{29}}{29}=\frac{13}{3}$，故 D 正确. 故选 AD.



13. -3　由函数 $f(x)$是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，得 $f(0)=0$. 当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-1$，可得 $f(2)=4-1=3$，所以 $f(-2)=-f(2)=-3$，$f(0)+f(-2)=-3$.

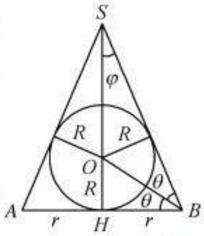
14. 100　$(1-x)(1+2x)^6$的展开式中含 x^3 项的系数为 $1\times C_6^3\times1^3\times2^3-1\times C_6^2\times1^4\times2^2=160-60=100$.

15. $11-4\sqrt{6}$　如图所示，设过点 A 的切线方程为 $y=kx-2$，所以$\frac{|-2|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得 $k=\pm\sqrt{3}$，所以直线 AM 的方程为 $y=\sqrt{3}x-2$，即$\sqrt{3}x-y-2=0$，直线 AN 的方程为 $y=-\sqrt{3}x-2$，即$\sqrt{3}x+y+2=0$，因为圆 B：$(x-a)^2+(y-2)^2=r^2$ 处于圆 O 的"背面"，由图可知$a\in\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$，当圆 B 与圆 O 外切且圆 B 与 AM(或 AN)相切时，r 取最大值，由圆 B 与圆 O 外切，得 $\sqrt{a^2+4}=r+1$，由圆 B 与 AM 相切，得$\frac{|\sqrt{3}a-4|}{2}=r$，由 $a\in$



2
官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

$\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$，得$\frac{4-\sqrt{3}a}{2}=r$，所以 $a=\frac{4-2r}{\sqrt{3}}$，即 $r^2-22r+25=0$，解得 $r=11+4\sqrt{6}$ 或 $r=11-4\sqrt{6}$，结合 $a\in\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$可得 $r=11-4\sqrt{6}$，所以 r 的最大值为 $11-4\sqrt{6}$，同理圆 B 与 AN 相切时 r 的最大值为 $11-4\sqrt{6}$，故 r 的最大值为 $11-4\sqrt{6}$.



16. 36π（3 分）　$3\sqrt{2}$（2 分）　设圆锥底面半径为 r，高为 h，当球 O 与圆锥相切时体积最大，设此时球 O 的半径为 R，如图，作出圆锥的轴截面$\triangle SAB$，内切圆圆心为 O，AB 中点为 H，则 $AB=2r$，高 $h=SH=SO+OH$，设$\angle OBH=\angle OBS=\theta$，则$\angle BSH=\varphi=\frac{\pi}{2}-2\theta$，其中 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $\tan\theta=\frac{R}{r}$，$\sin\varphi=\frac{R}{SO}$，所以 $r=\frac{R}{\tan\theta}$，$SO=\frac{R}{\sin\varphi}=\frac{R}{\cos 2\theta}$，所以 $h=SH=SO+OH=\frac{R}{\cos 2\theta}+R$，所以圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi R^2}{3\tan^2\theta}\left(\frac{R}{\cos 2\theta}+R\right)=\frac{\pi R^3}{3}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{\cos 2\theta}=\frac{\pi R^3}{3}\cdot\frac{\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}\cdot\frac{2\cos^2\theta}{2\cos^2\theta-1}=72\pi$，所以$\frac{\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}\cdot\frac{\cos^2\theta}{2\cos^2\theta-1}=\frac{108}{R^3}$，令 $x=\cos^2\theta$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，所以$\frac{108}{R^3}=\frac{x^2}{(1-x)(2x-1)}=\frac{x^2}{-2x^2+3x-1}$，$x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，所以 $R^3=108\times\frac{-2x^2+3x-1}{x^2}$，$x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，令 $f(x)=\frac{-2x^2+3x-1}{x^2}=-2+\frac{3x-1}{x^2}$，$x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，则$f'(x)=\frac{3x^2-2x(3x-1)}{x^4}=\frac{-3x^2+2x}{x^4}=\frac{2-3x}{x^3}$，$x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，所以当 $x\in\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$时，$f'(x)>0$；$x\in\left(\frac{2}{3},1\right)$时，$f'(x)<$ [illegible]，所以 $(R^3)_{\max}=108\times$ [illegible] $=\frac{\sqrt{6}}{3}$，[illegible]

17. [illegible] ……………………………… 1分

[illegible] ……………………………… 2分

[illegible] ……………………………… 3分

又 $a_1=2$，所以 $a_n=2n$. ……………………………… 5分

(2)$S_n=\frac{(2+2n)n}{2}=n(n+1)$，……………………………… 7分

所以 $b_n=\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，……………………………… 8分

记数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，

则 $T_{2023}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2\,023}-\frac{1}{2\,024}=1-\frac{1}{2\,024}=\frac{2\,023}{2\,024}$. ……………………………… 10分

18. (1)证明：在$\triangle ABC$ 中，$a\sin A-b\sin B=c(\sin B+\sin C)$，

由正弦定理，得 $a^2-b^2=bc+c^2$，即 $b^2+c^2-a^2=-bc$，……………………………… 2分

由余弦定理，得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}$，……………………………… 4分

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$，……………………………… 5分

所以$\triangle ABC$ 是钝角三角形. ……………………………… 6分

(2)解：因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$，……………………………… 7分

且 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times1\times c\times\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\times1\times b\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}(b+c)$，……………………………… 8分

3
官方微信公众号：zizzsw
官方网站：www.zizzs.com
咨询热线：010-5601 9830
微信客服：zizzs2018

所以 $bc=b+c$, …………………………………………………………………………………………… 9 分

由余弦定理,得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-72}{2bc}=\frac{(b+c)^2-2bc-72}{2bc}=\frac{(b+c)^2-2(b+c)-72}{2(b+c)}=-\frac{1}{2}$, ……………………… 10 分

解得 $b+c=9$(负值舍去), ……………………………………………………………………………… 11 分

所以△ABC 的周长为 $6\sqrt{2}+9$. ………………………………………………………………………… 12 分

19. 解:(1)补全 2×2 列联表如下:

	不喜欢冷饮	喜欢冷饮	总计
45 岁以上(含 45 岁)	30	15	45
45 岁以下	15	40	55
总计	45	55	100

所以 $\chi^2=\frac{100\times(30\times40-15\times15)^2}{45\times55\times45\times55}\approx15.519>6.635$, ……………………………………… 4 分

所以有 99%的把握认为本区居民喜欢冷饮与年龄有关. ……………………………………………… 5 分

(2)设选取的 2 人中有人喜欢冷饮为事件 A,所以 $P(A)=\frac{C_{100}^2-C_{45}^2}{C_{100}^2}$. ……………………………………… 7 分

设选取的 2 人中有 45 岁以下的人为事件 B,则选取的 2 人中既有人喜欢冷饮,又有 45 岁以下的人为事件 AB.

所以 $P(AB)=$ [illegible] …………………………………………………………………………… 9 分

所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=$ [illegible] …………………………………………………………… 11 分

[illegible] 冷饮 [illegible] 2 人 [illegible] ……

…… 12 分

20. [illegible]

[illegible] $=\frac{1}{2}$ [illegible] $=\frac{1}{2}$ [illegible] $=\frac{[illegible]}{3}$, …… 1 分

由三棱柱知四边形 AA_1C_1C 是平行四边形,所以 $S_{\triangle AA_1C_1}=\frac{1}{2}S_{四边形AA_1C_1C}=2$, …………………………………… 2 分

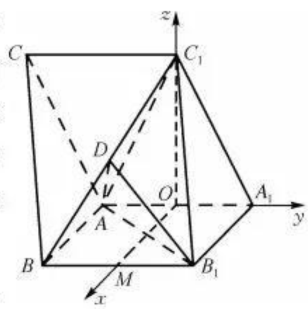
又 $V_{C_1-AB_1A_1}=V_{B_1-AA_1C_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle AA_1C_1}\cdot d=\frac{4}{3}$,所以 $\frac{1}{3}\times2d=\frac{4}{3}$,解得 $d=2$,

即点 B_1 到平面 ACC_1A_1 的距离为 2. ………………………………………………………………… 4 分

(2)因为四边形 ABB_1A_1 是正方形,所以 $AA_1\perp A_1B_1$,

又平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 ABB_1A_1,平面 $ACC_1A_1\cap$ 平面 $ABB_1A_1=AA_1$,$A_1B_1\subset$ 平面 ABB_1A_1,

所以 $A_1B_1\perp$ 平面 ACC_1A_1,则由(1)知 $A_1B_1=2$. ……………………………………… 5 分



取 AA_1 的中点 O,BB_1 的中点 M,连接 OC_1,OM,因为 $AC_1=A_1C_1$,O 为 AA_1 的中点,所以 $C_1O\perp AA_1$,又平面 $ACC_1A_1\perp ABB_1A_1$,平面 $ACC_1A_1\cap$ 平面 $ABB_1A_1=AA_1$,$C_1O\subset$ 平面 ACC_1A_1,所以 $C_1O\perp$ 平面 ABB_1A_1,又 $OM\subset$ 平面 ABB_1A_1,所以 $C_1O\perp OM$,又四边形 ABB_1A_1 为正方形,所以 $OM\perp AA_1$,故 OM,OA_1,OC_1 两两垂直,以 O 为坐标原点,OM,OA_1,OC_1 分别为 x 轴,y 轴,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,

由(1)可得 $AA_1=2$,$OC_1=2$,则 $A(0,-1,0)$,$B(2,-1,0)$,$B_1(2,1,0)$,$A_1(0,1,0)$,

$C_1(0,0,2)$,$D\left(1,-\frac{1}{2},1\right)$, ……………………………………………………………………… 6 分

所以$\overrightarrow{AB_1}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{AD}=\left(1,\frac{1}{2},1\right)$，$\overrightarrow{A_1B_1}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(0,-1,2)$，

设平面 ADB_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{AB_1}\cdot\boldsymbol{n}=2x+2y=0,\\ \overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}=x+\frac{1}{2}y+z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=-1$，$z=-\frac{1}{2}$，所以平面 ADB_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(1,-1,-\frac{1}{2}\right)$，………………………… 8分

设平面 $A_1B_1C_1$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\boldsymbol{m}=2a=0,\\ \overrightarrow{A_1C_1}\cdot\boldsymbol{m}=-b+2c=0,\end{cases}$

令 $b=2$，则 $c=1$，$a=0$，所以平面 $A_1B_1C_1$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,2,1)$，………………………… 10分

$$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{0-2-\frac{1}{2}}{\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}\times\sqrt{0+4+1}}=-\frac{\sqrt{5}}{3},$$

设平面 ADB_1 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成锐二面角的大小为 θ，则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

即平面 ADB_1 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成锐二面角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{3}$. ………………………… 12分

21. 解：(1)由题知 $F(c,0)$，C 的一条渐近线为 $bx+ay=0$，则 $d=\frac{|bc|}{\sqrt{b^2+a^2}}=b=\sqrt{3}$. ………………………… 2分

[illegible] ………………………… 3分

[illegible] $=1$. ………………………… 4分

(2)[illegible]

[illegible] $=0$ [illegible] $(-1,0)$和

[illegible] $|BM|=|BN|$ [illegible] ………………………… 5分

[illegible]

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，线段 MN 的中点为 $Q(x_0,y_0)$，

联立$\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{3}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 整理，得 $(3-k^2)x^2-2kmx-m^2-3=0$，

所以$\begin{cases}3-k^2\neq0,\\ \Delta=4k^2m^2+4(3-k^2)(m^2+3)>0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}3-k^2\neq0,\\ m^2+3-k^2>0,\end{cases}$

所以 $x_1+x_2=\frac{2km}{3-k^2}$，$x_1x_2=-\frac{m^2+3}{3-k^2}$，$x_0=\frac{km}{3-k^2}$，$y_0=\frac{3m}{3-k^2}$，………………………… 7分

因为 $|BM|=|BN|$，所以 $BQ\perp MN$，所以 $k_{BQ}=\frac{y_0-\sqrt{3}}{x_0}=\frac{\frac{3m}{3-k^2}-\sqrt{3}}{\frac{km}{3-k^2}}=-\frac{1}{k}$，

所以 $3-k^2=\frac{4\sqrt{3}}{3}m$，………………………… 8分

又点 $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ 在直线 l 上，所以 $m=\frac{\sqrt{3}}{2}k$，………………………… 9分

所以 $3-k^2=\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}k$，解得 $k=-3$ 或 1，满足$\begin{cases}3-k^2\neq0,\\ m^2+3-k^2>0,\end{cases}$ ………………………… 10分

5
官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

所以直线 l 的方程为 $y=-3x-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 或 $y=x+\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………………………… 11 分

综上,直线 l 的方程为 $y=0$, $y=-3x-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 或 $y=x+\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………………… 12 分

22. (1)解:$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $f'(x)=e+\frac{m}{x}=\frac{ex+m}{x}$, ………………………………… 1 分

若 $m\geqslant0$,则 $f'(x)=\frac{ex+m}{x}>0$ 恒成立,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;………………… 2 分

若 $m<0$,令 $f'(x)=\frac{ex+m}{x}=0$,得 $x=-\frac{m}{e}$,

当 $x\in\left(0,-\frac{m}{e}\right)$ 时,$f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减;当 $x\in\left(-\frac{m}{e},+\infty\right)$ 时,$f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增.

综上,当 $m\geqslant0$ 时,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;当 $m<0$ 时,$f(x)$ 在 $\left(0,-\frac{m}{e}\right)$ 上单调递减,在 $\left(-\frac{m}{e},+\infty\right)$ 上单调递增. ……………………………………………………………………………… 4 分

(2)证明:当 $m=-1$ 时,$f(x)=ex-\ln x$.

所以 $[f(\sqrt{x_1x_2})]^2=(e\sqrt{x_1x_2}-\ln\sqrt{x_1x_2})^2=e^2x_1x_2-2e\sqrt{x_1x_2}\ln\sqrt{x_1x_2}+\ln^2\sqrt{x_1x_2}$,

$f(x_1)f(x_2)=(ex_1-\ln x_1)(ex_2-\ln x_2)=e^2x_1x_2-e(x_1\ln x_2+x_2\ln x_1)+\ln x_1\ln x_2$. ……………… 5 分

[illegible]

[illegible]

[illegible] ……………………………………… 6 分

[illegible]

[illegible] $\cdot\ln x_2]=$

[illegible]

故只需证 $2e\sqrt{x_1x_2}(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})\left(\frac{\ln\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1}}-\frac{\ln\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_2}}\right)\geqslant0$. …………………………………… 8 分

下面给出证明:设 $h(x)=\frac{\ln x}{x}(x>3)$,则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,当 $x\in(3,+\infty)$ 时,$h'(x)<0$ 恒成立,$h(x)$ 单调递减,

当 $x_1>x_2>9$ 时,$\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}>0$, $h(\sqrt{x_1})-h(\sqrt{x_2})<0$,所以 $(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})[h(\sqrt{x_1})-h(\sqrt{x_2})]<0$;

当 $x_1=x_2$ 时,$\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=0$,所以 $(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})[h(\sqrt{x_1})-h(\sqrt{x_2})]=0$;

当 $x_2>x_1>9$ 时,$\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}<0$, $h(\sqrt{x_1})-h(\sqrt{x_2})>0$,所以 $(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})[h(\sqrt{x_1})-h(\sqrt{x_2})]<0$.

所以 $(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})[h(\sqrt{x_1})-h(\sqrt{x_2})]\leqslant0$ 对任意的 $x_1,x_2\in(9,+\infty)$ 恒成立,

即 $2e\sqrt{x_1x_2}(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})\left(\frac{\ln\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1}}-\frac{\ln\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_2}}\right)\geqslant0$ 对任意的 $x_1,x_2\in(9,+\infty)$ 恒成立. ……………………… 11 分

综上所述,$\frac{1}{4}(\ln x_1+\ln x_2)^2-e\sqrt{x_1x_2}\ln(x_1x_2)+e(x_1\ln x_2+x_2\ln x_1)\geqslant\ln x_1\ln x_2$ 恒成立,

故对任意的 $x_1,x_2\in(9,+\infty)$, $[f(\sqrt{x_1x_2})]^2\geqslant f(x_1)f(x_2)$. ……………………………………… 12 分

6
官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。