

洛阳市 2022—2023 学年高二质量检测 数学试卷(文) 参考答案

一、选择题

1 - 5 CBDAC 6 - 10 CABBD 11 - 12 AB

二、填空题

13. 240 14. 10 15. 15 16. ①②③

三、解答题

17. (1) 展开式中第 2 项、第 3 项、第 4 项的二项式系数分别为 C_n^1, C_n^2, C_n^3 ,
依题意得 $2C_n^2 = C_n^1 + C_n^3$,2 分

即 $2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2}$, 解得 $n = 7$ ($n = 2$ 舍去).

所以 $n = 7$5 分

(2) 在 $(2x + \frac{1}{\sqrt{x}})^7$ 展开式中, $T_7 = C_7^6(2x) \cdot (\frac{1}{\sqrt{x}})^6 = \frac{14}{x^2}$9 分

所以展开式中的第 7 项是 $\frac{14}{x^2}$10 分

18. (1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 q} = \frac{2}{a_1 q^2}$, 即 $1 - \frac{1}{q} = \frac{2}{q^2}$,
解得 $q = 2$ 或 $q = -1$2 分

若 $q = -1$, 则 $S_6 = 0$, 与 $S_6 = 63$ 矛盾, 不符合题意. $\therefore q = 2$,3 分

$\therefore S_6 = \frac{a_1(1-2^6)}{1-2} = 63$,

$\therefore a_1 = 1$. $\therefore a_n = 2^{n-1}$5 分

(2) $\because b_n$ 是 $\log_2 a_n$ 和 $\log_2 a_{n+1}$ 的等差中项,

$\therefore b_n = \frac{1}{2}(\log_2 a_n + \log_2 a_{n+1}) = \frac{1}{2}(\log_2 2^{n-1} + \log_2 2^n) = n - \frac{1}{2}$7 分

$\therefore b_{n+1} - b_n = 1$, 即 $\{b_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项, 以 1 为公差的等差数列.8 分

设 $\{(-1)^n b_n^2\}$ 的前 $2n$ 项和为 T_{2n} ,

则 $T_{2n} = (-b_1^2 + b_2^2) + (-b_3^2 + b_4^2) + \cdots + (-b_{2n-1}^2 + b_{2n}^2)$
 $= b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_{2n-1} + b_{2n}$ 10 分

$= \frac{b_1 + b_{2n}}{2} \cdot 2n = \frac{\frac{1}{2} + 2n - \frac{1}{2}}{2} \cdot 2n = 2n^2$12 分

19. (1) 以 $\{\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AP}\}$ 为单位正交基底, 建立如图所示的空间直角坐标系 $Axyz$,

高二数学(文)答案 第1页 (共4页) (2023.6)

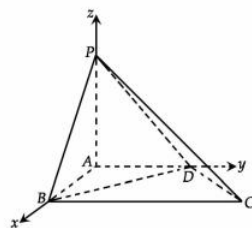
因为 $AP = AB = AD = 1$,

所以 $A(0,0,0), B(1,0,0), D(0,1,0), P(0,0,1)$,

.....1 分

设 $C(1,y,0)$, 则 $\overrightarrow{PB} = (1,0,-1), \overrightarrow{CD} = (-1,1-y,0)$.

.....2 分



因为直线 PB 与 CD 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$,

$$\text{所以 } |\cos \langle \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{CD} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{CD}|} = \frac{1}{2},$$

.....3 分

$$\text{即 } \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{1 + (1-y)^2}} = \frac{1}{2}, \text{ 解得 } y = 2 (y = 0 \text{ 舍}),$$

所以 $C(1,2,0)$, $\therefore BC$ 的长为 2.

.....5 分

(2) 设平面 PBD 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x, y, z)$.

因为 $\overrightarrow{PB} = (1,0,-1), \overrightarrow{PD} = (0,1,-1)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{PB} \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \\ \overrightarrow{PD} \cdot \mathbf{n}_1 = 0. \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x - z = 0, \\ y - z = 0. \end{cases}$$

令 $x = 1$, 则 $y = 1, z = 1$, 所以 $\mathbf{n}_1 = (1,1,1)$,

.....7 分

同理求得平面 PBC 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = (1,0,1)$.

.....9 分

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

.....11 分

$\therefore$ 二面角 $D - PB - C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

.....12 分

20. (1) 由题意得 $T(2,0)$, 且 GQ 是 PT 的中垂线, 所以 $|PG| = |GT|$.

$$\text{又 } |GS| + |GT| = |GS| + |GP| = |PS| = 2\sqrt{6} > 4 = |ST|,$$

.....2 分

所以点 G 的轨迹是以 S, T 为焦点的椭圆,

.....3 分

$$\text{设椭圆方程为 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0),$$

$$\text{因此 } a = \sqrt{6}, c = 2, \text{ 所以 } b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{2},$$

.....4 分

$$\text{因此曲线 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

.....5 分

(2) 显然直线 l 不与 x 轴重合,

$$\text{设 } l: x = ty - 2, \text{ 代入 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1, \text{ 整理得 } (t^2 + 3)y^2 - 4ty - 2 = 0,$$

.....6 分

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2) \text{ 则 } y_1 + y_2 = \frac{4t}{t^2 + 3}, y_1 y_2 = \frac{-2}{t^2 + 3},$$

.....7 分

$$\text{从而 } |y_1 - y_2| = \sqrt{\left(\frac{4t}{t^2 + 3}\right)^2 - 4\left(\frac{-2}{t^2 + 3}\right)} = \frac{2\sqrt{6}\sqrt{t^2 + 1}}{t^2 + 3},$$

.....8 分

高二数学(文)答案 第2页 (共4页) (2023.6)

$$S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} |OS| |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2\sqrt{6}\sqrt{t^2+1}}{t^2+3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}. \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

所以 $\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2+3} = \frac{1}{3}$, 解得 $t^2 = 3$ 或 $t^2 = 0$, 从而 $t = \pm\sqrt{3}$ 或 $t = 0$. $\dots\dots 11 \text{ 分}$

故直线 l 的方程为 $x \pm \sqrt{3}y + 2 = 0$ 或 $x = -2$. $\dots\dots 12 \text{ 分}$

21. (1) 根据题意, 列联表完成如下:

性别	是否体验汉服		合计
	体验汉服	没有体验汉服	
女	180	100	280
男	40	80	120
合计	220	180	400

$\dots\dots 2 \text{ 分}$

零假设为 H_0 : 性别与体验汉服之间无关联.

$\dots\dots 3 \text{ 分}$

根据列联表数据, 经计算得到

$$\chi^2 = \frac{400 \times (180 \times 80 - 100 \times 40)^2}{280 \times 120 \times 220 \times 180} \approx 32.516 > 10.828 = \chi_{0.001} \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

根据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 推断 H_0 不成立,

即认为体验汉服与性别之间有关联, 此推断犯错误的概率不超过 0.001. $\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 由数据可得,

$$r = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i y_i - 7\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^7 x_i^2 - 7\bar{x}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^7 y_i^2 - 7\bar{y}^2}} = \frac{1827 - 7 \times 9 \times 22}{\sqrt{727 - 7 \times 9^2} \cdot \sqrt{4648 - 7 \times 22^2}}$$

$$= \frac{441}{\sqrt{160} \cdot \sqrt{1260}} = \frac{441}{120\sqrt{14}} \approx 0.98, \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore 0.98 > 0.75,$$

$\therefore$ 线性相关程度很强, 可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系. $\dots\dots 9 \text{ 分}$

(3) 由数据及公式可得, $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i y_i - 7\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^7 x_i^2 - 7\bar{x}^2} = \frac{441}{160} \approx 2.8,$ $\dots\dots 10 \text{ 分}$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 22 - 2.8 \times 9 = -3.2.$$

所以 y 关于 x 的经验回归方程为 $y = 2.8x - 3.2$. $\dots\dots 11 \text{ 分}$

高二数学(文)答案 第3页 (共4页) (2023.6)

当 $x = 18$ 万元时, 销售额预计为 $y = 47.2$ 万元.12 分

22. (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

当 $a = 1$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln x, f(1) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$,1 分

又 $f'(x) = x - 2 + \frac{1}{x}$ 所以 $f'(1) = 0$,2 分

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = -\frac{3}{2}$4 分

(2) $\because f'(x) = x - 2a + \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 2ax + 1}{x}$5 分

$\therefore x_1, x_2$ 是方程 $f'(x) = 0$ 即 $x^2 - 2ax + 1 = 0$ 的两个不等的正实根.6 分

从而得 $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 = 2a > 0, \text{ 即 } a > 1, \text{ 而 } 0 < x_1 < x_2, \text{ 则 } x_2 > 1, \\ x_1 x_2 = 1 > 0 \end{cases}$ 8 分

$\therefore f(x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 - 2ax_2 + \ln x_2$
 $= \frac{1}{2}x_2^2 - (x_1 + x_2)x_2 + \ln x_2 = -\frac{1}{2}x_2^2 - 1 + \ln x_2$ 10 分

令 $t = x_2 > 1$, 则 $f(x_2) = g(t) = -\frac{1}{2}t^2 - 1 + \ln t, g'(t) = -t + \frac{1}{t} = \frac{1-t^2}{t} < 0$,11 分

$\therefore g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore g(t) < g(1) = -\frac{3}{2}$,

$\therefore g(t)$ 的值域是 $(-\infty, -\frac{3}{2})$, 即 $f(x_2)$ 的范围是 $(-\infty, -\frac{3}{2})$12 分



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线