丰台区 2017 年高三年级第二学期综合练习（一）

数　学（理科）

2017. 03

（本试卷满分共 150 分，考试时间 120 分钟）

注意事项：

1. 答题前，考生务必先将答题卡上的学校、年级、班级、姓名、准考证号用黑色字迹签字笔填写清楚，并认真核对条形码上的准考证号、姓名，在答题卡的“条形码粘贴区”贴好条形码。

2. 本次考试所有答题均在答题卡上完成。选择题必须使用 2B 铅笔以正确填涂方式将各小题对应选项涂黑，如需改动，用橡皮擦除干净后再选涂其它选项。非选择题必须使用标准黑色字迹签字笔书写，要求字体工整、字迹清楚。

3. 请严格按照答题卡上题号在相应答题区内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试卷、草稿纸上答题无效。

4. 请保持答题卡卡面清洁，不要装订、不要折叠、不要破损。

第一部分　（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 如果集合 $A=\{x\in \mathbf{Z} \mid -2\le x<1\}$，$B=\{-1,0,1\}$，那么 $A\cap B=$

（A）$\{-2,-1,0,1\}$　　（B）$\{-1,0,1\}$　　（C）$\{0,1\}$　　（D）$\{-1,0\}$

2. 已知 $a,b\in \mathbf{R}$，则“$b\neq 0$”是“复数 $a+bi$ 是纯虚数”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

3. 定积分 $\int_1^3 (2x-\frac{1}{x})\mathrm{d}x=$

（A）$10-\ln 3$　　（B）$8-\ln 3$　　（C）$\frac{22}{3}$　　（D）$\frac{64}{9}$

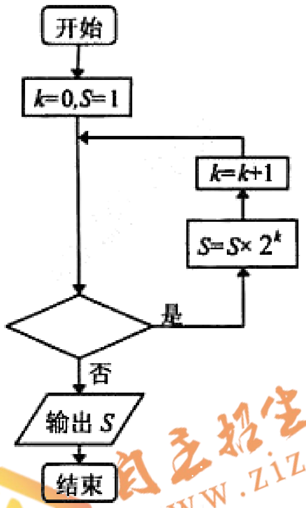
4. 设 E，F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 AB，BC 上的点，且 $AE=\frac{1}{2}AB$，$BF=\frac{2}{3}BC$，如果 $\overrightarrow{EF}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$（$m$，$n$ 为实数），那么 $m+n$ 的值为

（A）$-\frac{1}{2}$　　（B）0　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）1

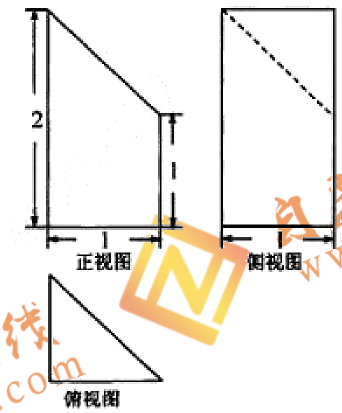
官方微信公众号：zizzsw

5. 执行如图所示的程序框图，若输出的 S 的值为 64，则判断框内可填入的条件是

（A）$k\le 3$?　　（B）$k<3$?　　（C）$k\le 4$?　　（D）$k>4$?



第 5 题



第 6 题

6. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为

（A）$\frac{5}{6}$　　（B）$\frac{2}{3}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{1}{3}$

7. 小明跟父母、爷爷奶奶一同参加《中国诗词大会》的现场录制，5 人坐成一排．若小明的父母至少有一人与他相邻，则不同坐法的总数为

（A）60　　（B）72　　（C）84　　（D）96

8. 一次猜奖游戏中，1, 2, 3, 4 四扇门里摆放了 a,b,c,d 四件奖品（每扇门里仅放一件）．甲同学说：1 号门里是 b，3 号门里是 c；乙同学说：2 号门里是 b，3 号门里是 d；丙同学说：4 号门里是 b，2 号门里是 c；丁同学说：4 号门里是 a，3 号门里是 c．如果他们每人都猜对了一半，那么 4 号门里是

（A）a　　（B）b　　（C）c　　（D）d

官方微信公众号：zizzsw

第二部分 （非选择题 共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 抛物线 $y^2=2x$ 的准线方程是_______.

10. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，S_n 为其前 n 项和. 若 $a_2=2$，$S_9=9$，则 $a_8=$_______.

11. 在△ABC 中，若 $b^2=ac$，$\angle B=\frac{\pi}{3}$，则 $\angle A=$_______.

12. 若 x,y 满足 $\begin{cases} x-y+2\le 0, \\ x+y-7\le 0, \\ x\ge 1, \end{cases}$ 则 $\frac{y}{x}$ 的取值范围是_______.

13. 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $C_1: x+y=4$，曲线 $C_2: \begin{cases} x=1+\cos\theta, \\ y=\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数），过原点 O 的直线 l 分别交 C_1，C_2 于 A，B 两点，则 $\frac{|OB|}{|OA|}$ 的最大值为_______.

14. 已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}$，下列命题正确的有_______.（写出所有正确命题的编号）

①$f(x)$ 是奇函数；

②$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调递增函数；

③方程 $f(x)=x^2+2x$ 有且仅有 1 个实数根；

④如果对任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)>kx$，那么 k 的最大值为 2.

官方微信公众号：zizzsw

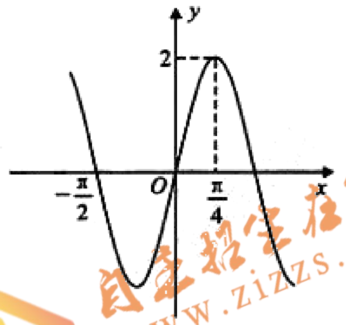
三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15.（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x)$ $(\omega>0)$ 的图象如图所示．

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）若 $g(x)=f(x)\cdot\cos(2x+\frac{\pi}{6})$，求 $g(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的单调递减区间．



16.（本小题共 14 分）

如图 1，平面五边形 $ABCDE$ 中，$AB\,//\,CD$，$\angle BAD=90°$，$AB=2$，$CD=1$，$\triangle ADE$ 是边长为 2 的正三角形．现将$\triangle ADE$ 沿 AD 折起，得到四棱锥 $E-ABCD$（如图 2），且 $DE\perp AB$．

（Ⅰ）求证：平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$；

（Ⅱ）求平面 BCE 和平面 ADE 所成锐二面角的大小；

（Ⅲ）在棱 AE 上是否存在点 F，使得 $DF\,//$ 平面 BCE？若存在，求 $\frac{EF}{EA}$ 的值；若不存在，请说明理由．

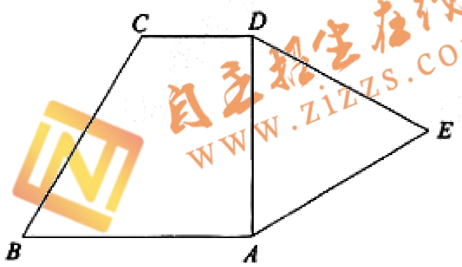


图 1

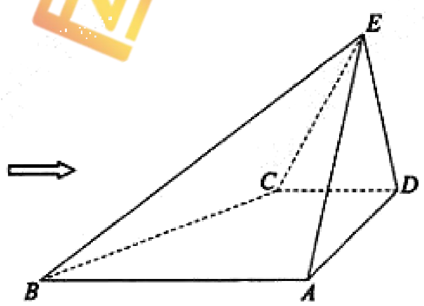


图 2

17.（本小题共 13 分）

某公司购买了 A，B，C 三种不同品牌的电动智能送风口罩. 为了解三种品牌口罩的电池性能，现采用分层抽样的方法，从三种品牌的口罩中抽出 25 台，测试它们一次完全充电后的连续待机时长，统计结果如下（单位：小时）：

A	4	4	4.5	5	5.5	6	6		
B	4.5	5	6	6.5	6.5	7	7	7.5		
C	5	5	5.5	6	6	7	7	7.5	8	8

（Ⅰ）已知该公司购买的 C 品牌电动智能送风口罩比 B 品牌多 200 台，求该公司购买的 B 品牌电动智能送风口罩的数量；

（Ⅱ）从 A 品牌和 B 品牌抽出的电动智能送风口罩中，各随机选取一台，求 A 品牌待机时长高于 B 品牌的概率；

（Ⅲ）再从 A，B，C 三种不同品牌的电动智能送风口罩中各随机抽取一台，它们的待机时长分别是 a，b，c（单位：小时）. 这 3 个新数据与表格中的数据构成的新样本的平均数记为 μ_1，表格中数据的平均数记为 μ_0. 若 $\mu_0 \le \mu_1$，写出 $a+b+c$ 的最小值（结论不要求证明）.

18.（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=\ln(kx)+\frac{1}{x}-k\ (k>0)$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）对任意 $x\in[\frac{1}{k},\frac{2}{k}]$，都有 $x\ln(kx)-kx+1\le mx$，求 m 的取值范围.

官方微信公众号：zizzsw

19.（本小题共 14 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，右焦点为 F，点 $P(0,1)$ 在椭圆 C 上.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）过点 F 的直线交椭圆 C 于 M，N 两点，交直线 $x=2$ 于点 P，设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{MF}$，$\overrightarrow{PN}=\mu\overrightarrow{NF}$，求证：$\lambda+\mu$ 为定值.

20.（本小题共 13 分）

对于 $\forall n\in N^*$，若数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}-x_n>1$，则称这个数列为“K 数列”.

（Ⅰ）已知数列：1，$m+1$，m^2 是“K 数列”，求实数 m 的取值范围；

（Ⅱ）是否存在首项为-1 的等差数列 $\{a_n\}$ 为“K 数列”，且其前 n 项和 S_n 满足 $S_n<\frac{1}{2}n^2-n$？若存在，求出 $\{a_n\}$ 的通项公式；若不存在，请说明理由；

（Ⅲ）已知各项均为正整数的等比数列 $\{a_n\}$ 是“K 数列”，数列 $\left\{\frac{1}{2}a_n\right\}$ 不是“K 数列”，若 $b_n=\frac{a_{n+1}}{n+1}$，试判断数列 $\{b_n\}$ 是否为“K 数列”，并说明理由.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

官方微信公众号：zizzsw

丰台区 2016~2017 学年度第二学期一模练习

高三数学（理科）参考答案及评分参考

2017. 03

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	B	C	A	A	C	A

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. $x=-\frac{1}{2}$　　10. 0　　11. $\frac{\pi}{3}$

12. $\left[\frac{9}{5},6\right]$　　13. $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$　　14. ①②④

三、解答题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.（本小题共 13 分）

解：（1）由图象可知 $A=2$，

设函数 $f(x)$ 的周期为 T，则 $\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{2})=\frac{3}{4}T$，

求得 $T=\pi$，从而 $\omega=2$，

所以 $f(x)=2\sin 2x$ ……………………5 分

（2）因为 $g(x)=2\sin 2x\cos(2x+\frac{\pi}{6})$

$$=\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x-\sin^2 2x$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x+\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{1}{2}$$

$$=\sin(4x+\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2},$$

所以 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 4x+\frac{\pi}{6}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，

即 $\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in Z$

令 $k=0$，得 $\frac{\pi}{12}\le x\le\frac{\pi}{3}$，

所以 $g(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的单调递减区间为 $[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}]$. ……………………13 分

官方微信公众号：zizzsw

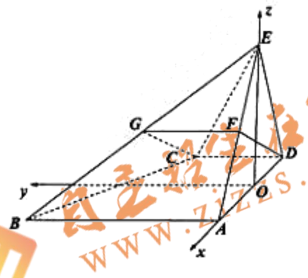
16.（本小题共 14 分）

（Ⅰ）证明：由已知得 $AB \perp AD$，$AB \perp DE$.

因为 $AD \cap DE = D$，所以 $AB \perp$ 平面 ADE.

又 $AB \subset$ 平面 $ABCD$，所以平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD$. ……………….4 分

（Ⅱ）设 AD 的中点为 O，连接 EO.



因为△ ADE 是正三角形，

所以 $EA = ED$，所以 $EO \perp AD$.

因为 平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD$，

平面 $ADE \cap$ 平面 $ABCD = AD$，$EO \subset$ 平面 ADE，

所以 $EO \perp$ 平面 $ABCD$.

以 O 为原点，OA 所在的直线为 x 轴，在平面 $ABCD$ 内过 O 垂直于 AD 的直线为 y 轴，OE 所在的直线为 z 轴，

建立空间直角坐标系 $O-xyz$，如图所示.

由已知，得 $E(0,0,\sqrt{3})$，$B(1,2,0)$，$C(-1,1,0)$.

所以 $\overrightarrow{CE} = (1,-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CB} = (2,1,0)$.

设平面 BCE 的法向量 $\boldsymbol{m} = (x,y,z)$.

则 $\begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{CE} = 0, \\ \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{CB} = 0. \end{cases}$

所以 $\begin{cases} x - y + \sqrt{3}z = 0, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$

令 $x = 1$，则 $y = -2$，$z = -\sqrt{3}$，

所以 $\boldsymbol{m} = (1,-2,-\sqrt{3})$.

又平面 ADE 的一个法向量 $\boldsymbol{n} = (0,1,0)$，

所以 $\cos\langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \rangle = \dfrac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

所以平面 BCE 和平面 ADE 所成的锐二面角大小为 $\dfrac{\pi}{4}$. ……………….10 分

（Ⅲ）在棱 AE 上存在点 F，使得 DF // 平面 BCE，此时 $\dfrac{EF}{EA} = \dfrac{1}{2}$.

理由如下：

设 BE 的中点为 G，连接 CG，FG，

则 FG // AB，$FG = \dfrac{1}{2}AB$.

因为 AB // CD，且 $CD = \dfrac{1}{2}AB$，

所以 FG // CD，且 $FG = CD$，

所以 四边形 $CDFG$ 是平行四边形，

所以 $DF // CG$.

因为$CG \subset$平面BCE，且$DF \not\subset$平面BCE，

所以$DF //$平面BCE. ....14 分

17.（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）设该公司购买的 B 品牌电动智能送风口罩的数量为 x 台，

则购买的 C 品牌电动智能送风口罩为$\frac{5}{4}x$ 台，

由题意得$\frac{5}{4}x-x=200$，所以$x=800$.

答：该公司购买的 B 品牌电动智能送风口罩的数量为 800 台 ....5 分

（Ⅱ）设 A 品牌待机时长高于 B 品牌的概率为 P，

则$P=\frac{7}{7\times8}=\frac{1}{8}$.

答：在 A 品牌和 B 品牌抽出的电动智能送风口罩中各任取一台，

A 品牌待机时长高于 B 品牌的概率为$\frac{1}{8}$. ....10 分

（Ⅲ）18 ....13 分

18.（本小题共 13 分）

解：由已知得，$f(x)$ 的定义域为$(0,+\infty)$.

（Ⅰ）$f'(x)=\frac{x-1}{x^2}$，

令$f'(x)>0$，得$x>1$，令$f'(x)<0$，得$0<x<1$.

所以函数$f(x)$的单调减区间是$(0,1)$，单调增区间是$(1,+\infty)$. ....5 分

（Ⅱ）由$x\ln(kx)-kx+1\le mx$，

得$\ln(kx)+\frac{1}{x}-k\le m$，即$m\ge f(x)_{max}$.

由（Ⅰ）知，

（1）当$k\ge2$时，$f(x)$在$[\frac{1}{k},\frac{2}{k}]$上单调递减，所以$f(x)_{max}=f(\frac{1}{k})=0$，所以$m\ge0$；

（2）当$0<k\le1$时，$f(x)$在$[\frac{1}{k},\frac{2}{k}]$上单调递增，所以$f(x)_{max}=f(\frac{2}{k})=\ln2-\frac{k}{2}$，

所以$m\ge\ln2-\frac{k}{2}$；

（3）当$1<k<2$时，$f(x)$在$[\frac{1}{k},1)$上单调递减，在$(1,\frac{2}{k}]$上单调递增，

所以$f(x)_{max}=max\left\{f(\frac{1}{k}),f(\frac{2}{k})\right\}$.

又$f(\frac{1}{k})=0$，$f(\frac{2}{k})=\ln2-\frac{k}{2}$，

① 若$f(\frac{2}{k})\ge f(\frac{1}{k})$，即$\ln2-\frac{k}{2}\ge0$，所以$1<k<2\ln2$，此时$f(x)_{max}=f(\frac{2}{k})=\ln2-\frac{k}{2}$，

所以$m\ge\ln2-\frac{k}{2}$.

官方微信公众号：zizzsw

② 若$f(\frac{2}{k})<f(\frac{1}{k})$，即$\ln 2-\frac{k}{2}<0$，所以$2\ln 2\le k<2$，此时$f(x)_{\max}=0$，所以$m\ge 0$.

综上所述，当$k\ge 2\ln 2$时，$m\ge 0$；

当$0<k<2\ln 2$时，$m\ge \ln 2-\frac{k}{2}$. …………………13 分

19.（本小题共 14 分）

（Ⅰ）解：因为点$P(0,1)$在椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上，所以$\frac{1}{b^2}=1$，即$b=1$.

又因为椭圆C的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

由$a^2=b^2+c^2$，得$a=\sqrt{2}$.

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$. …………………5 分

（Ⅱ）证明：由已知得$F(1,0)$,直线MN的斜率存在.

设直线MN的方程为$y=k(x-1)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则$P(2,k)$.

由$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{MF}$，$\overrightarrow{PN}=\mu\overrightarrow{NF}$，得$\lambda=\frac{2-x_1}{x_1-1}$，$\mu=\frac{2-x_2}{x_2-1}$，

所以$\lambda+\mu=\frac{2-x_1}{x_1-1}+\frac{2-x_2}{x_2-1}=\frac{3(x_1+x_2)-2x_1x_2-4}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}$，

联立$\begin{cases} y=k(x-1), \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1, \end{cases}$ 得$(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$.

所以$x_1+x_2=\frac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2k^2-2}{1+2k^2}$.

因为 $3(x_1+x_2)-2x_1x_2-4=3\times\frac{4k^2}{1+2k^2}-2\times\frac{2k^2-2}{1+2k^2}-4$

$=\frac{12k^2-4k^2+4-4-8k^2}{1+2k^2}$

$=0$，

所以$\lambda+\mu=0$为定值. …………………14 分

20.（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）由题意得$(m+1)-1>1$，①

$m^2-(m+1)>1$，②

解①得 $m>1$；

解②得 $m<-1$或$m>2$.

所以$m>2$，故实数m的取值范围是$m>2$. …………………4 分

（Ⅱ）假设存在等差数列$\{a_n\}$符合要求，设公差为d，则$d>1$，

由 $a_1=-1$，得 $S_n=-n+\frac{n(n-1)}{2}d$，

由题意，得$-n+\frac{n(n-1)}{2}d<\frac{1}{2}n^2-n$对$n\in N^*$均成立，

即$(n-1)d<n$.

①当$n=1$时，$d\in R$;

②当$n>1$时，$d<\frac{n}{n-1}$，

因为$\frac{n}{n-1}=1+\frac{1}{n-1}>1$，

所以$d\le 1$，与$d>1$矛盾，

故这样的等差数列$\{a_n\}$不存在. ……………………8分

(Ⅲ) 设数列$\{a_n\}$的公比为q，则$a_n=a_1q^{n-1}$，

因为$\{a_n\}$的每一项均为正整数，且$a_{n+1}-a_n=a_nq-a_n=a_n(q-1)>1>0$，

所以$a_1>0$，且$q>1$.

因为$a_{n+1}-a_n=q(a_n-a_{n-1})>a_n-a_{n-1}$，

所以在$\{a_n-a_{n-1}\}$中，“a_2-a_1”为最小项.

同理，在$\{\frac{1}{2}a_n-\frac{1}{2}a_{n-1}\}$中，“$\frac{1}{2}a_2-\frac{1}{2}a_1$”为最小项.

由$\{a_n\}$为“K数列”，只需$a_2-a_1>1$，即$a_1(q-1)>1$，

又因为$\{\frac{1}{2}a_n\}$不是“K数列”，且“$\frac{1}{2}a_2-\frac{1}{2}a_1$”为最小项，所以$\frac{1}{2}a_2-\frac{1}{2}a_1\le 1$，即$a_1(q-1)\le 2$，

由数列$\{a_n\}$的每一项均为正整数，可得$a_1(q-1)=2$，

所以$a_1=1,q=3$或$a_1=2,q=2$.

① 当$a_1=1,q=3$时，$a_n=3^{n-1}$，则$b_n=\frac{3^n}{n+1}$，

令$c_n=b_{n+1}-b_n(n\in N^*)$，则$c_n=\frac{3^{n+1}}{n+2}-\frac{3^n}{n+1}=3^n\cdot\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$，

又$3^{n+1}\cdot\frac{2n+3}{(n+2)(n+3)}-3^n\cdot\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{3^n}{n+2}\cdot\frac{4n^2+8n+6}{(n+1)(n+3)}>0$，

所以$\{c_n\}$为递增数列，即$c_n>c_{n-1}>c_{n-2}>\cdots>c_1$，

所以$b_{n+1}-b_n>b_n-b_{n-1}>b_{n-1}-b_{n-2}>\cdots>b_2-b_1$.

因为$b_2-b_1=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}>1$，

所以对任意的$n\in N^*$，都有$b_{n+1}-b_n>1$，

即数列$\{c_n\}$为“K数列”.

② 当$a_1=2,q=2$时，$a_n=2^n$，则$b_n=\frac{2^{n+1}}{n+1}$. 因为$b_2-b_1=\frac{2}{3}\le 1$，

所以数列$\{b_n\}$不是“K数列”.

综上：当$a_n=3^{n-1}$时，数列$\{b_n\}$为“K数列”，

当$a_n=2^n$时，数列$\{b_n\}$不是“K数列”. ……………………13分

（若用其他方法解题，请酌情给分）

官方微信公众号：zizzsw

扫描二维码，关注自主招生官方微信！

查看更多自主招生相关资讯！

官方微信公众号：zizzsw