Z20 名校联盟（浙江省名校新高考研究联盟）2023 届高三第一次联考

数学参考答案（后附评分细则）

一、**单选题**（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	B	D	C	C	D	B

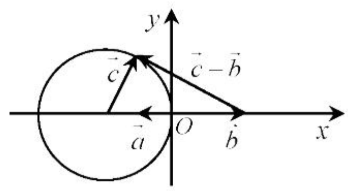
8．解法一：不妨设 $\vec{a}=(-1,0),\vec{b}=(2,0)$，$\vec{c}=(x,y)$，

因为 $|\vec{c}-\vec{a}|=\frac{1}{2}|\vec{c}-\vec{b}|$，

所以 $\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，

即 $x^2+4x+y^2=0$，

由图可知，向量 $\vec{c}-\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 夹角的最大值是 $\frac{\pi}{6}$.



解法二：$\because 2|\vec{c}-\vec{a}|=|\vec{c}-\vec{b}|$，$\therefore 2|\vec{c}-\vec{b}+\vec{b}-\vec{a}|=|\vec{c}-\vec{b}|$，

又 $\because \vec{b}=-2\vec{a}$，$\therefore 2|(\vec{c}-\vec{b})-3\vec{a}|=|\vec{c}-\vec{b}|$，

则 $4\left[(\vec{c}-\vec{b})^2-6\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})+9\vec{a}^2\right]=(\vec{c}-\vec{b})^2$，

即 $(\vec{c}-\vec{b})^2-8\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})+12=0$，即 $\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\dfrac{(\vec{c}-\vec{b})^2+12}{8}$，

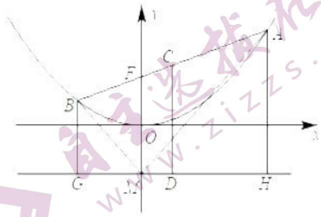
所以 $\cos<\vec{a},(\vec{c}-\vec{b})>=\dfrac{\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{c}-\vec{b}|}=\dfrac{(\vec{c}-\vec{b})^2+12}{8|\vec{c}-\vec{b}|}\ge\dfrac{2\sqrt{12(\vec{c}-\vec{b})^2}}{8|\vec{c}-\vec{b}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

向量 $\vec{c}-\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 夹角的最大值是 $\frac{\pi}{6}$.

二、**多选题**（本大题共 4 小题，每小题 5 分共 20 分.每小题列出的四个选项中有多个是符合题目要求的，全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11	12
答案	AC	BC	ABD	ACD

11．解析：如图，过 A、B 作准线 $y=-1$ 的垂线，垂足分别为 H、G，设线段 AB 的中点为 C，C 在准线上的射影为 D.当线段 AB 为通径时长度最小为 $2p=4$，故 A 正确；



因为 $k_{AB}=\dfrac{x_1+x_2}{2p}=1$，故 B 正确；

因为直线 $y=-1$ 为抛物线准线，

由抛物线定义可知弦 AB 的中点到准线的距离 CD 等于 $\dfrac{1}{2}(|BG|+|AH|)=\dfrac{1}{2}|AB|$，

故圆与直线 $y=-1$ 相切，所以点 M 在该圆的圆上或者圆外，故 C 错误；

由题意 $M(0,-1)$，设 $A(x_1,\dfrac{x_1^2}{4})$，$B(x_2,\dfrac{x_2^2}{4})$，直线 AB 方程为 $y=mx+1$，

则 $\begin{cases}y=mx+1\\x^2=4y\end{cases}$ 可得 $x^2-4mx-4=0$，所以 $x_1+x_2=4m,x_1x_2=-4$，

$$k_{MA}=\frac{\frac{x_1^2}{4}+1}{x_1}=\frac{x_1}{4}+\frac{1}{x_1},k_{MB}=\frac{\frac{x_2^2}{4}+1}{x_2}=\frac{x_2}{4}+\frac{1}{x_2}$$

$$\therefore k_{MA}+k_{MB}=\frac{x_1}{4}+\frac{1}{x_1}+\frac{x_2}{4}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{4}+\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{x_1+x_2}{4}-\frac{x_1+x_2}{4}=0,$$

所以直线 MA 与直线 MB 的斜率互为相反数，直线倾斜角互补，所以 $\angle AMO=\angle BMO$，故 D 正确（D 选项也可用平面几何三角形相似得到），

故选：ABD.

12．解析：$\because f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$\therefore f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

又 $\because \dfrac{\ln x_1}{x_1}=\dfrac{\ln e^{x_2}}{e^{x_2}}=k$，

$\therefore$ 当 $k>0$ 时，要使 x_1+x_2 越小，则取 $x_1=e^{x_2}\to 1$，故有 $x_1+x_2>1$，故 A 正确；

又 x_1 与 e^{x_2} 均可趋向于 $+\infty$，故 B 错误；

当 $k<0$，$x_1=e^{x_2}$，且 $x_1\in(0,1)$，$\therefore x_1+x_2=x_1+\ln x_1<1$，故 C 正确；

$\dfrac{x_2}{x_1}\cdot e^k=ke^k$，令 $g(k)=ke^k,k<0$，$g'(k)=(k+1)e^k$，

$\therefore g(k)$ 在 $(-\infty,-1)$ 单调递减，在 $(-1,0)$ 单调递增，$\therefore g(k)\ge g(-1)=-\dfrac{1}{e}$，故 D 正确，

故选：ACD.

三、填空题（本大题有 4 小题，单空每空 4 分，多空每空 3 分，共 20 分）

13．π；

14．$2^{n-1}-2$；

15．$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$；

16．$a=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$.

16．解析：直线 l 的方程可化为 $a(x-y-3)+2x+y-3=0$，

由 $\begin{cases}2x+y-3=0\\x-y-3=0\end{cases}$，解得直线 l 的恒过定点 $(2,-1)$，

又点 C 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{|4a+2|}{\sqrt{(a+2)^2+(a-1)^2}}=\dfrac{|4a+2|}{\sqrt{2a^2+2a+5}}$，

因为 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}r^2\sin\angle BCA\le\dfrac{1}{2}r^2=2\Rightarrow r=2$，

则当 ΔABC 的面积最大为 2 时， ΔABC 为等腰直角三角形，

圆心 C 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{|4a+2|}{\sqrt{2a^2+2a+5}}=\dfrac{r}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

解得 $a=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$.

四、解答题（本大题有 6 小题，共 70 分．解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤）

17．解：

（1）$\because b\left(\sqrt{3}\sin A-\cos C\right)=(c-a)\cos B$，

$\therefore \sin B\left(\sqrt{3}\sin A-\cos C\right)=\left(\sin C-\sin A\right)\cos B$，

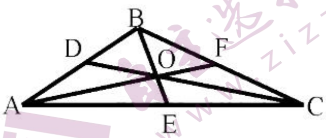
则 $\sqrt{3}\sin A\sin B=\sin\left(B+C\right)-\sin A\cos B$，即 $\sqrt{3}\sin A\sin B=\sin A-\sin A\cos B$，

$\because \sin A\ne 0,\therefore \sqrt{3}\sin B+\cos B=1$，即有 $\sin(B+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$，

$\because B+\dfrac{\pi}{6}\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6})$，$\therefore B=\dfrac{2\pi}{3}$； **5 分**

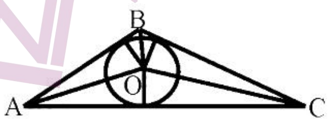
（2）若选① O 为 ΔABC 的重心，

$S_{\Delta OAC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta BAC}=\dfrac{1}{3}\bullet\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$； **10 分**



若选② O 为 ΔABC 的内心，

$\because b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=49$， $\therefore b=7$，



设内切圆半径为 r，则有 $\dfrac{1}{2}(a+b+c)r=S_{\Delta ABC}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$，

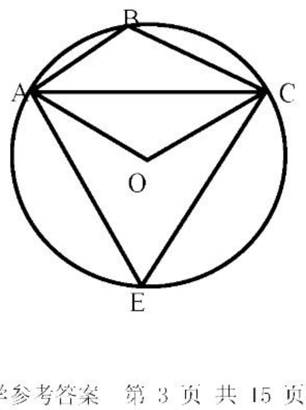
则有 $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，此时 $S_{\Delta OAC}=\dfrac{1}{2}br=\dfrac{7\sqrt{3}}{4}$； **10 分**

若选③ O 为 ΔABC 的外心，

$\because b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=49$， $\therefore b=7$，

设外接圆半径为 **R**，则 $2\mathbf{R}=\dfrac{b}{\sin B}$，解得 $\mathbf{R}=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$，

如图，$\angle AOC=\dfrac{2\pi}{3}$，



此时，$S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}R^2\sin\angle AOC=\frac{49\sqrt{3}}{12}$.　　　**10 分**

18．解：

（I）$\because \frac{a_n}{\sqrt{S_nS_{n-1}}}=\frac{1}{\sqrt{S_{n-1}}}+\frac{1}{\sqrt{S_n}}$（$n\in N^*$ 且 $n\geq 2$），

$\therefore a_n=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}$，

$\therefore$ 当 $n\geq 2$ 时，$S_n-S_{n-1}=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}$，

$\therefore \left(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}\right)\left(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}\right)=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}$，

又 $\because a_n>0$，所以 $\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}>0$，

$\therefore \sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=1(n\geq 2)$，

$\therefore$ 数列 $\left\{\sqrt{S_n}\right\}$ 是以 $\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1}=1$ 为首项，公差为 1 的等差数列，

$\therefore \sqrt{S_n}=1+(n-1)\times 1=n$，所以 $S_n=n^2$.　　　**4 分**

$\therefore$ 当 $n\geq 2$ 时，$a_n=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}=n+n-1=2n-1$，

又 $\because a_1=1$ 满足上式，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$.　　　**6 分**

另解：

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$，

当 $n=1$ 时，$a_1=1$，满足上式，

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$.　　　**6 分**

（II）当 $n\geq 2$ 时，$\frac{1}{a_n^2-1}=\frac{1}{4n^2-4n}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$，

故 $\frac{1}{a_2^2-1}+\cdots+\frac{1}{a_n^2-1}=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{4}$，

所以对 $n\in N^*, n\geq 2$，都有 $\frac{1}{a_2^2-1}+\cdots+\frac{1}{a_n^2-1}<\frac{1}{4}$.　　　**12 分**

19．解：

（I）方法一：延长 CB, DA 交于点 F，连接 PF，

在 ΔCDF 中，

$\because BD$ 是 $\angle ADC$ 的平分线，且 $BD\perp BC$，

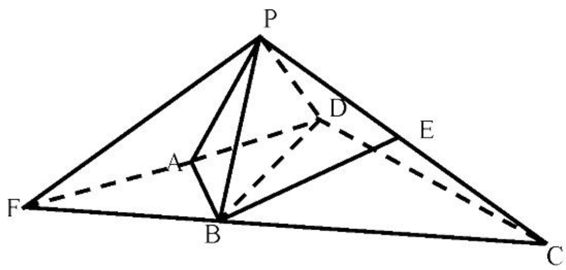
$\therefore$ 点 B 是 CF 的中点，

又 $\because E$ 是 PC 的中点，

$\therefore BE\parallel PF$，

又 $PF\subset$ 平面 PAD，$BE\not\subset$ 平面 PAD，

$\therefore$ 直线 $BE\parallel$ 平面 PAD.　　　**6 分**



方法二：取 CD 的中点为 G，连接 GE，

$\because E$ 为 PC 的中点，$\therefore GE\parallel PD$，

又 $PD\subset$ 平面 PAD，$GE\not\subset$ 平面 PAD，

$\therefore GE$ // 平面 PAD，①

又在四边形 $ABCD$ 中，

$AD=2$， $BD=4$， $AB=2\sqrt{3}$，

则 $\angle BAD=90^\circ$, $\angle BDA=\angle BDC=60^\circ$.

又因为 $BD\perp BC$，G 为 CD 的中点，

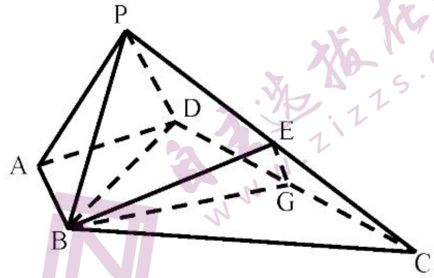
所以 $\angle DBG=\angle BDA=60^\circ$.

所以 AD // BG，可得 BG // 平面 PAD，②

由①②得平面 BEG // 平面 PAD，

又 $BE\subset$ 平面 BEG， $BE\not\subset$ 平面 PAD，

$\therefore$ 直线 BE // 平面 PAD.



6 分

（II）在 ΔABD 中， $AD=2$， $BD=4$， $AB=2\sqrt{3}$，

则 $\angle BAD=90^\circ$，即 $BA\perp AD$，

由已知得 $\angle BDC=\angle BDA=60^\circ$， $CD=8$，

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$， $BA\subset$ 平面 $ABCD$，

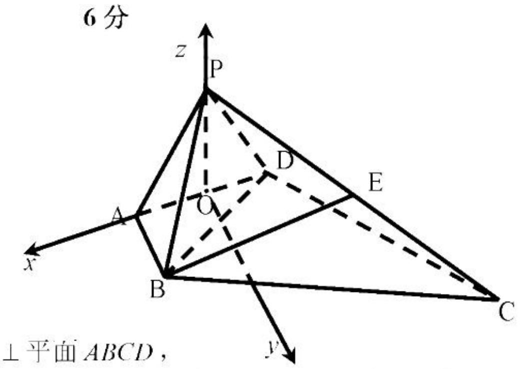
所以 $BA\perp$ 平面 PAD，即 $BA\perp PA$，

所以 $\angle PAD$ 为二面角 $P-AB-D$ 的的平面角，

所以 $\angle PAD=60^\circ$，

又 $PA=AD=2$，所以 ΔPAD 为正三角形，

取 AD 的中点为 O，连 OP，则 $OP\perp AD$， $OP\perp$ 平面 $ABCD$，



如图建立空间直角坐标系，则 $A(1,0,0)$, $B(1,2\sqrt{3},0)$, $C(-5,4\sqrt{3},0)$, $D(-1,0,0)$, $P(0,0,\sqrt{3})$,

所以 $\overrightarrow{DP}=(1,0,\sqrt{3})$, $\overrightarrow{BD}=(-2,-2\sqrt{3},0)$, $\overrightarrow{DC}=(-4,4\sqrt{3},0)$,

设 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 分别为平面 PBD 和平面 PCD 的法向量，则

$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DP}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1+\sqrt{3}z_1=0\\ -2x_1-2\sqrt{3}y_1=0\end{cases}$，取 $y_1=-1$，则 $\vec{m}=(\sqrt{3},-1,-1)$，

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_2+\sqrt{3}z_2=0\\ -4x_2+4\sqrt{3}y_2=0\end{cases}$，取 $y_2=1$，则 $\vec{n}=(\sqrt{3},1,-1)$，

所以 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{3}{5}$，

则平面 PBD 和平面 PCD 所成夹角的余弦值为 $\dfrac{3}{5}$.　　　　**12 分**

20．解：

（I）由题意得 $\overline{x}=\dfrac{4+5+6+7}{4}=5.5$， $\overline{y}=\dfrac{0.2+0.3+0.4+0.5}{4}=0.35$，

又 $\sum_{i=1}^{4}x_iy_i=7\times0.5+6\times0.4+5\times0.3+4\times0.2=8.2$，

$\therefore \sum_{i=1}^{4} x_i y_i - 4\overline{x} \cdot \overline{y} = 8.2 - 4 \times 5.5 \times 0.35 = 0.5$

$\because \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 = 126,$

$\therefore \sum_{i=1}^{4} x_i^2 - 4\overline{x}^2 = 126 - 4 \times 5.5^2 = 5$

$\therefore \hat{b} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i y_i - 4\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{4} x_i^2 - 4\overline{x}^2} = \dfrac{0.5}{5} = 0.1$，

所以 $\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x} = 0.35 - 0.1 \times 5.5 = -0.2$，

故得 y 关于 x 的线性回归方程为 $y = 0.1x - 0.2$． **5 分**

（II）

（i）将 $x = 8$ 代入 $y = 0.1x - 0.2 = 0.1 \times 8 - 0.2 = 0.6$，

估计该省要发放补贴的总金额为 $0.6 \times 1000 \times 0.5 = 300$（万元） **7 分**

（ii）设小浙、小江两人中选择考研的的人数为 X，则 X 的所有可能值为 0，1，2；

$P(X=0) = (1-p)(2-3p) = 3p^2 - 5p + 2$，

$P(X=1) = (1-p)(3p-1) + p(2-3p) = -6p^2 + 6p - 1$，

$P(X=2) = p(3p-1) = 3p^2 - p$，

$\therefore E(X) = 0 \times (3p^2 - 5p + 2) + (-6p^2 + 6p - 1) \times 1 + (3p^2 - p) \times 2 = 4p - 1$，

$E(0.5X) = 0.5 \times (4p - 1) \le 0.75 \Rightarrow p \le \dfrac{5}{8}$，

$\therefore 0 \le 3p - 1 \le 1$，$\therefore \dfrac{1}{3} \le p \le 1$，$\therefore \dfrac{1}{3} \le p \le \dfrac{5}{8}$．

故 p 的取值范围为 $\left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{8}\right]$． **12 分**

注：p 的取值范围未取等不符不扣分

21．解：

（I）因为 $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $c^2 = \dfrac{4}{3}a^2 = a^2 + b^2$，即 $a^2 = 3b^2$，

又点$\left(3,\sqrt{2}\right)$在双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$图象上，

所以$\dfrac{9}{a^2}-\dfrac{2}{b^2}=1$，即$\dfrac{9}{3b^2}-\dfrac{2}{b^2}=1$，解得$b^2=1,a^2=3$，

所以双曲线$C:\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**4分**

（II）由已知点A,B在以OP为直径的圆$\left(x-\dfrac{x_0}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{y_0}{2}\right)^2=\dfrac{x_0^2+y_0^2}{4}$上，

又点A,B在$x^2+y^2=1$上，则有方程组$\begin{cases}\left(x-\dfrac{x_0}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{y_0}{2}\right)^2=\dfrac{x_0^2+y_0^2}{4},\\ x^2+y^2=1,\end{cases}$

解得直线AB的方程为$x_0x+y_0y=1$，

设直线AB与渐近线$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x,y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$的交点分别为$M,N$，

由$\begin{cases}x_0x+y_0y=1,\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x,\end{cases}$解得$M\left(\dfrac{1}{x_0+\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_0},\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{x_0+\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_0}\right)$，

由$\begin{cases}x_0x+y_0y=1,\\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x,\end{cases}$解得$N\left(\dfrac{1}{x_0-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_0},\dfrac{-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{x_0-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_0}\right)$，

所以$|MN|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{x_0+\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_0}-\dfrac{1}{x_0-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_0}\right)^2+\left(\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{x_0+\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_0}+\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{x_0-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_0}\right)^2}=\dfrac{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{\left|x_0^2-\dfrac{1}{3}y_0^2\right|}$，

又点O到直线AB的距离为$d=\dfrac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$，

则三角形MON的面积$S=\dfrac{1}{2}|MN|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{\left|x_0^2-\dfrac{1}{3}y_0^2\right|}\times\dfrac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{1}{\left|x_0^2-\dfrac{1}{3}y_0^2\right|}$，

又因为$\dfrac{x_0^2}{3}-y_0^2=1$，所以$S=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{1}{3+\dfrac{8}{3}y_0^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{9+8y_0^2}$，

由已知$S=\dfrac{\sqrt{3}}{33}$，解得$y_0^2=3$，即$y_0=\pm\sqrt{3}$，

因为点P在双曲线右支上，解得$x_0=2\sqrt{3}$，

即点$P\left(2\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$或$P\left(2\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)$．　　　　　　　　　　　　　　**12分**

22．解：

（I）当$a=\frac{2}{e^2}$时，$f(x)=x\ln x-x-\frac{1}{e^2}x^2=x\left(\ln x-1-\frac{1}{e^2}x\right)$，

要证$f(x)\le 0$，即证$\ln x-1-\frac{1}{e^2}x\le 0$，

设$g(x)=\ln x-1-\frac{1}{e^2}x,x>0$，

令$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e^2}=0$，解得$x=e^2$，

所以$g(x)$在$\left(0,e^2\right)$上递增，在$\left(e^2,+\infty\right)$上递减，

则$g(x)_{\max}=g\left(e^2\right)=\ln e^2-1-\frac{1}{e^2}\times e^2=0$，

所以$g(x)\le 0$，即$\ln x-1-\frac{1}{e^2}x\le 0$成立，

所以$f(x)\le 0$成立． 5分

（II）因为对任意的$x>0$，$H(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，

所以$H'(x)\le 0$恒成立，

即$a\le\frac{xe^x-\ln x-1}{x}$在$(0,+\infty)$上恒成立，

解法一：令$F(x)=\frac{xe^x-\ln x-1}{x}(x>0)$，则$F'(x)=\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$，

令$h(x)=x^2e^x+\ln x$，则$h'(x)=\left(x^2+2x\right)e^x+\frac{1}{x}>0$，

所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数，

又因为$h(1)=e>0,h\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^2}-1=e^{\frac{1}{e}-2}-1<0$，

所以$\exists x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$，使得$h\left(x_0\right)=0$，即$x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，

当$0<x<x_0$时，$h(x)<0$，可得$F'(x)<0$，所以$F(x)$在$\left(0,x_0\right)$上单调递减；

当$x>x_0$时，$h(x)>0$，可得$F'(x)>0$，所以$F(x)$在$\left(x_0,+\infty\right)$上单调递增，

所以$F(x)_{\min}=F\left(x_0\right)=\frac{x_0e^{x_0}-\ln x_0-1}{x_0}$，

由$x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，可得$x_0e^{x_0}=-\frac{\ln x_0}{x_0}=\frac{1}{x_0}\ln\frac{1}{x_0}=\left(\ln\frac{1}{x_0}\right)e^{\ln\frac{1}{x_0}}$，

令 $t(x)=xe^{x}$，则 $t(x_0)=t\left(\ln\frac{1}{x_0}\right)$，

又由 $t'(x)=(x+1)e^{x}>0$，所以 $t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x_0=\ln\frac{1}{x_0}$，可得 $\ln x_0=-x_0$，所以 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，即 $x_0e^{x_0}=1$，

所以 $F(x)_{\min}=F(x_0)=\frac{x_0e^{x_0}-\ln x_0-1}{x_0}=\frac{1+x_0-1}{x_0}=1$，

即得 $a\le 1$. **12 分**

解法二：先证 $e^{x}\ge x+1$（$x\ge 0$），
设函数 $h(x)=e^{x}-x-1$，令 $h'(x)=e^{x}-1=0$，解得 $x=0$，
$\therefore h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore h(x)\ge h(0)=0$，即 $e^{x}\ge x+1$ 成立.
设 $k(x)=\ln x+x$（$x>0$），
$\because k'(x)=\frac{1}{x}+1>0$，$\therefore k(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，
$\because k\left(\frac{1}{e}\right)=-1+\frac{1}{e}<0, k(1)=1>0$，
$\therefore$ 存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $\ln x_0+x_0=0$.
令 $F(x)=\frac{xe^{x}-\ln x-1}{x}(x>0)$，
则 $F(x)=\frac{e^{\ln x}e^{x}-\ln x-1}{x}=\frac{e^{\ln x+x}-\ln x-1}{x}\ge\frac{\ln x+x+1-\ln x-1}{x}=1$，
当 $\ln x+x=0$ 时，即 $x=x_0$ 时，取等号.
$\therefore F(x)_{\min}=1$，
即得 $a\le 1$. **12 分**

Z20 名校联盟（浙江省名校新高考研究联盟）2023 届高三第一次联考

数学试卷阅卷细则

13-16.（每题 5 分，共 20 分）

以数值正确为准， 注：第 16 题给出一个正确数值得 3 分.

17.（本题满分 10 分）

（I）5 分

1、有正确结论，$B=\frac{2\pi}{3}$，有过程，5 分（无过程，3 分）

2、无正确结论，找得分点：

① $\sqrt{3}\sin A\sin B=\sin(B+C)-\sin A\cos B$ ， 2 分

② $\sin(B+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$，2 分

③ $B=\frac{2\pi}{3}$，1 分

（II）5 分

1、有正确结论，有过程，5 分（无过程，3 分）

2、无正确结论，找得分点：

① $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{15\sqrt{3}}{4}$，2 分

$S_{\triangle OAC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{5\sqrt{3}}{4}$，3 分

② $\because b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=49$，$\therefore b=7$，2 分

解得内切圆半径 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$，2 分

$S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}br=\frac{7\sqrt{3}}{4}$，1 分

③ $\because b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=49$，$\therefore b=7$，2 分

解得 $\mathbf{R}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$，，2 分

解得 $S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}R^2\sin\angle AOC=\frac{49\sqrt{3}}{12}$，1 分

18.（本题满分 12 分）

（I）6 分

1、有正确结论，得 $a_n=2n-1$，有过程，6 分（无过程，2 分）

2、无正确结论，找得分点：

① $a_n=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}$，2 分

② $S_n=n^2$，2 分

③ $a_n=2n-1$，2 分

（II）6 分

1、有正确证明过程，6 分（无过程，不得分）

2、证明有误，找得分点：

① $\frac{1}{a_n^2-1}=\frac{1}{4n^2-4n}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$，3 分

② $\frac{1}{a_2^2-1}+\cdots+\frac{1}{a_n^2-1}=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{4}$，3 分

19.（本题满分 12 分）

（I）6 分

1、有证明过程，6 分（无过程，不得分）

2、证明有误，找得分点：

方法一：

① $BD\perp BC$，2 分

② $BE\parallel PF$，2 分

③直线 $BE\parallel$ 平面 PAD，2 分

方法二：

①取 CD 的中点为 G，$GE\parallel PD$，2 分

② $AD\parallel BG$，2 分

③由平面 $BEG\parallel$ 平面 PAD 得直线 $BE\parallel$ 平面 PAD，2 分

（II）6 分

1、有正确结论$\frac{3}{5}$，有过程，6 分（无过程，3 分）

2、无正确结论，找得分点：

①$\angle PAD = 60^{\circ}$，1 分

②有建系思想，1 分

③ 求出法向量$\vec{m} = \left(\sqrt{3}, -1, -1\right)$，$\vec{n} = \left(\sqrt{3}, 1, -1\right)$，2 分

（法向量计算错误但有法向量计算公式的给 1 分）

④解得余弦值为$\frac{3}{5}$，2 分（结论错误但有法向量夹角计算公式的给 1 分）

其他证法酌情给分

20.（本题满分 12 分）

（I）5 分

1、有正确结论：$y = 0.1x - 0.2$，有过程，5 分（无过程，2 分）

2、无正确结论，找得分点：

①$\because \sum_{i=1}^{4} x_i y_i - 4\overline{x} \cdot \overline{y} = 8.2 - 4 \times 5.5 \times 0.35 = 0.5$，

$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 - 4\overline{x}^2 = 126 - 4 \times 5.5^2 = 5$，

$\therefore \hat{b} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i y_i - 4\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{4} x_i^2 - 4\overline{x}^2} = \dfrac{0.5}{5} = 0.1$，3 分

②$\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x} = 0.35 - 0.1 \times 5.5 = -0.2$，1 分

③得 $y = 0.1x - 0.2$，1 分

（II）7 分

（i）1、有正确结论：300 万元，有过程，2 分（无过程，1 分）

2、无正确结论，找得分点：

将 $x = 8$ 代入 $y = 0.1x - 0.2 = 0.1 \times 8 - 0.2 = 0.6$，1 分

（ii）1、有正确结论：300 万元，有过程，5 分（无过程，2 分）

2、无正确结论，找得分点：

①$P(X=0)=(1-p)(2-3p)=3p^2-5p+2$，

$P(X=1)=(1-p)(3p-1)+p(2-3p)=-6p^2+6p-1$，

$P(X=2)=p(3p-1)=3p^2-p$，

$E(X)=0\times\left(3p^2-5p+2\right)+\left(-6p^2+6p-1\right)\times1+\left(3p^2-p\right)\times2=4p-1$，3 分

②解$\frac{1}{3}\le p\le\frac{5}{8}$，2 分（$\frac{1}{3}<p\le\frac{5}{8}$或$\frac{1}{3}\le p<\frac{5}{8}$或$\frac{1}{3}<p<\frac{5}{8}$均得 2 分）

21.（本题满分 12 分）

（I）4 分

1、有正确结论：双曲线$C:\frac{x^2}{3}-y^2=1$，有过程，4 分（无过程，2 分）

2、无正确结论，找得分点：

①得$a^2=3b^2$， 1 分

②点$\left(3,\sqrt{2}\right)$代入$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$，得$\frac{9}{a^2}-\frac{2}{b^2}=1$， 1 分

③解得$b^2=1,a^2=3$，双曲线$C:\frac{x^2}{3}-y^2=1$， 2 分

（II）8 分

1、有正确结论：点$P\left(2\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$或$P\left(2\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)$，有过程，8 分（无过程，3 分，只写出一个坐标的扣 1 分）

2、无正确结论，找得分点：

①解得直线AB的方程为$x_0x+y_0y=1$， 1 分

②由$\begin{cases}x_0x+y_0y=1,\\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x,\end{cases}$解得$M\left(\frac{1}{x_0+\frac{\sqrt{3}}{3}y_0},\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{x_0+\frac{\sqrt{3}}{3}y_0}\right)$，1 分

由 $\begin{cases} x_0x+y_0y=1, \\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x, \end{cases}$ 解得 $N(\dfrac{1}{x_0-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_0},\dfrac{-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{x_0-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_0})$，1 分

③ $|MN|=\sqrt{(\dfrac{1}{x_0+\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_0}-\dfrac{1}{x_0-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_0})^2+(\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{x_0+\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_0}+\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{x_0-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_0})^2}=\dfrac{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{\left|x_0^2-\dfrac{1}{3}y_0^2\right|}$，

点 O 到直线 AB 的距离为 $d=\dfrac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$，

三角形 MON 的面积

$S=\dfrac{1}{2}|MN|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{\left|x_0^2-\dfrac{1}{3}y_0^2\right|}\times\dfrac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{1}{\left|x_0^2-\dfrac{1}{3}y_0^2\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{9+8y_0^2}$，3 分

④点 $P\left(2\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$ 或 $P\left(2\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)$，2 分

本小题其他解法酌情给分

22.（本题满分 12 分）

（I）5 分

找得分点累加：

①要证 $f(x)\le 0$，即证 $\ln x-1-\dfrac{1}{e^2}x\le 0$，**1 分**

②设 $g(x)=\ln x-1-\dfrac{1}{e^2}x,x>0$，得 $g(x)$ 在 $\left(0,e^2\right)$ 上递增，在 $\left(e^2,+\infty\right)$ 上递减，**2 分**

③ $g(x)_{\max}=g\left(e^2\right)=\ln e^2-1-\dfrac{1}{e^2}\times e^2=0$，即 $\ln x-1-\dfrac{1}{e^2}x\le 0$ 成立，**2 分**

（II）7 分

1、有正确结论：$a\le 1$，有过程，7 分（无过程，2 分）

2、无正确结论，找得分点：

①由 $H'(x)\le 0$ 恒成立，得 $a\le\dfrac{xe^x-\ln x-1}{x}$，**2 分**

②令 $F(x)=\dfrac{xe^x-\ln x-1}{x}(x>0)$，得 $F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减；在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，**2 分**

③$\exists x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$，使得 $x_0^2 e^{x_0} + \ln x_0 = 0$，1 分

④求得 $F(x)_{\min} = F(x_0) = \frac{x_0 e^{x_0} - \ln x_0 - 1}{x_0} = \frac{1 + x_0 - 1}{x_0} = 1$，即 $a \le 1$，2 分

本小题其他解法酌情给分