天一大联考
2022—2023 学年(下)高一年级期中考试

数学・答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案 A

命题意图 本题考查复数的基本概念和运算.

解析 $|z|=\dfrac{\sqrt{3^2+1^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$.

2. 答案 D

命题意图 本题考查圆锥的性质.

解析 由条件知底面周长为 2π,即侧面展开得到的扇形的弧长为 2π,故圆心角为 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

3. 答案 D

命题意图 本题考查复数的几何意义.

解析 $(1-4i)(2+3i)=2+3i-8i-12i^2=14-5i$,其对应的点 $(14,-5)$ 位于第四象限.

4. 答案 B

命题意图 本题考查平面向量的坐标运算.

解析 由题知 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-2,6)\cdot(-4,\lambda)=8+6\lambda=0$,解得 $\lambda=-\dfrac{4}{3}$.

5. 答案 B

命题意图 本题考查平面多边形的直观图.

解析 在正方形 $O'A'B'C'$ 中可得 $B'O'=\sqrt{2}A'O'=2\sqrt{2}$,由斜二测画法可知 $BO=2B'O'=4\sqrt{2}$,$AO=A'O'=2$,且 $OA\perp OB$,所以 $S_{OABC}=BO\cdot AO=4\sqrt{2}\times2=8\sqrt{2}$.

6. 答案 A

命题意图 本题考查复数的几何意义.

解析 根据图示可知,复数 $z=1+2i$,则 $\dfrac{z}{3+2i}=\dfrac{1+2i}{3+2i}=\dfrac{(1+2i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\dfrac{3-2i+6i-4i^2}{13}=\dfrac{7+4i}{13}=\dfrac{7}{13}+\dfrac{4}{13}i$.

7. 答案 C

命题意图 本题考查平面向量的线性运算.

解析 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\dfrac{4}{5}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})-\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{5}\overrightarrow{BD}=-\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}=-\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{8}{15}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\dfrac{11}{15}\overrightarrow{AB}+\dfrac{8}{15}\overrightarrow{AC}=-\dfrac{11}{15}\boldsymbol{a}+\dfrac{8}{15}\boldsymbol{b}$.

8. 答案 D

命题意图 本题考查圆柱和球的有关计算.

解析 设圆柱的高为 $h(h>0)$,由题意知 $\dfrac{2}{3}\pi\times3^3\geqslant\pi\times3^2\times h$,得 $h\leqslant2$,即 $h\in(0,2]$. 所以 $S=2\pi\times3^2+2\pi\times$

$3h\in[18\pi,30\pi]$.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. **答案** ACD

命题意图 本题考查复数的概念、运算以及几何意义.

解析 因为复数 $z=\frac{i}{3+5i}=\frac{i(3-5i)}{(3+5i)(3-5i)}=\frac{5+3i}{34}=\frac{5}{34}+\frac{3}{34}i$，所以复数 $z=\frac{i}{3+5i}$ 的实部为 $\frac{5}{34}$，虚部为 $\frac{3}{34}$，共轭复数为 $\frac{5}{34}-\frac{3}{34}i$，复数 z 对应的点为 $\left(\frac{5}{34},\frac{3}{34}\right)$，满足 $y=\frac{3}{5}x$. 故 ACD 正确.

10. **答案** BC

命题意图 本题考查平面向量的运算.

解析 对于 A，与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量为 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{(3,-2)}{\sqrt{13}}=\left(\frac{3\sqrt{13}}{13},-\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$，故 A 错误；对于 B，当 $t=2$ 时，$\boldsymbol{a}=(3,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,2)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3,-2)\cdot(2,2)=2>0$，夹角为锐角，故 B 正确；对于 C，当 $t=1$ 时，$\boldsymbol{a}=(3,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,1)$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 可作为平面内的一组基底，故 C 正确；对于 D，设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影向量为 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}$，当 $t=4$ 时，$\boldsymbol{a}=(3,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,4)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3,-2)\cdot(2,4)=-2$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{13}$，所以 $\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}=\frac{-2}{13}(3,-2)=\left(-\frac{6}{13},\frac{4}{13}\right)$，故 D 错误.

11. **答案** AD

命题意图 本题考查空间几何体的结构特征.

解析 对于 A，因为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球的表面积为 14π，所以外接球的半径为 $R=\frac{\sqrt{14}}{2}$，则 $3^2+b^2+c^2=(2R)^2=14$①，因为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 6，所以 $3bc=6$②，由①②解得 $b=2$，$c=1$（$b=1$，$c=2$ 舍去），故 A 正确；对于 B，沿长方体的表面从 A 到 C_1，可将长方体的两个相邻的面展开成矩形，最短路径是这个矩形的对角线，这样的矩形共有 3 种，对角线长度为 $\sqrt{(2+3)^2+1^2}=\sqrt{26}$ 或 $\sqrt{(1+3)^2+2^2}=2\sqrt{5}$ 或 $\sqrt{(1+2)^2+3^2}=3\sqrt{2}$，故沿长方体的表面从 A 到 C_1 的最短路径长度为 $3\sqrt{2}$，故 B 错误；对于 C，长方体的表面积为 $2\times(3\times2+3\times1+2\times1)=22$，设与其表面积相等的正方体的棱长为 k，则 $6k^2=22$，解得 $k=\frac{\sqrt{33}}{3}$，故 C 错误；对于 D，棱长为 m 的正四面体的高为 $\sqrt{m^2-\left(\frac{\sqrt{3}m}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}m}{3}$，则正四面体的体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times m\times\frac{\sqrt{3}m}{2}\times\frac{\sqrt{6}m}{3}=6$，则 $m^3=36\sqrt{2}$，故 D 正确.

12. **答案** BCD

命题意图 本题考查解三角形与三角函数的综合应用.

解析 由正弦定理及 $\sin A=2\sin B$ 可得 $a=2b$. 对于 A，根据余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=7b^2$，所以 $c=\sqrt{7}b$，故 A 错误；对于 B，若 $C=2B$，则 $\sin C=\sin 2B=2\sin B\cos B=\sin A\cos B$，又 $\sin C=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，所以 $\cos A\sin B=0$，而 $\sin B\neq0$，所以 $\cos A=0$，即 $A=\frac{\pi}{2}$，故 B 正确；对于 C，若 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，只可能是 $a=c$（若 $b=c$，则 $a=2b=2c=b+c$，不能构成三角形），则 $c=2b$，由余弦定理可得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=$

$\frac{4b^2+4b^2-b^2}{8b^2}=\frac{7}{8}$，所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{\sqrt{15}}{8}$，故 C 正确；对于 D，由余弦定理可得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{5b^2-9}{4b^2}$，所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{3}{4b^2}\sqrt{-b^4+10b^2-9}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{3}{4}\sqrt{-b^4+10b^2-9}=\frac{3}{4}\sqrt{-(b^2-5)^2+16}$，当 $b=\sqrt{5}$ 时，$S_{\triangle ABC}$ 取最大值 3，故 D 正确.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案** $-\frac{24}{17}$

命题意图 本题考查平面向量的坐标运算.

解析 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=(-5,1)$，$t\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}=(2t-1,3t+5)$，因为 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})/\!/(t\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b})$，所以 $(-5)(3t+5)-(2t-1)=0$，解得 $t=-\frac{24}{17}$.

14. **答案** $3\pm4i$

命题意图 本题考查复数的概念和运算.

解析 利用求根公式可得 $x=\frac{6\pm\sqrt{36-4\times25}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-64}}{2}=3\pm4i$.

15. **答案** π

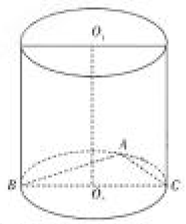
命题意图 本题考查复数的概念和三角函数的性质.

解析 因为 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，所以 $e^{3\pi i}=\cos3\pi+i\sin3\pi=\cos\pi+i\sin\pi$，所以 $e^{3\pi i}$ 的辐角主值为 π.

16. **答案** $\frac{27\sqrt{2}}{2}\pi$

命题意图 本题考查圆柱的结构特征及相关计算.

解析 如图所示，设圆柱的底面半径为 r，高为 h，则 $h=2r$. 再设 $\triangle ABC$ 的腰长为 a，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a^2=\frac{9}{2}$，解得 $a=3$，所以 $r=\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$h=3\sqrt{2}$. 所以该圆柱的体积为 $V=\pi r^2h=\frac{27\sqrt{2}}{2}\pi$.



四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查平面向量的坐标运算.

解析 （Ⅰ）由条件知 $\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}=(-2,2)+t(2,1)=(-2+2t,2+t)$，……（2 分）

所以 $|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-2+2t)^2+(2+t)^2}=\sqrt{5t^2-4t+8}=3$，即 $5t^2-4t-1=0$，……（4 分）

解得 $t=1$ 或 $t=-\frac{1}{5}$.……（5 分）

— 3 —

（Ⅱ）$\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}=(-2,2)-t(2,1)=(-2-2t,2-t)$，…………（7分）

又 $\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 垂直，所以 $(-2-2t)\times 2+(2-t)\times(-1)=0$，…………（9分）

解得 $t=-2$. …………（10分）

18. **命题意图**　本题考查复数的几何意义及运算.

解析　（Ⅰ）由题意知 $Z_1(1,b)$，$Z_2(2,-3)$，所以 $\overrightarrow{Z_1Z_2}=(1,-3-b)$，…………（3分）

因为 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 与 x 轴平行，所以 $-(3+b)=0$，…………（5分）

解得 $b=-3$. …………（6分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $z_1=1-3i$，

所以 $z=(m+z_1)^2=(m+1-3i)^2=(m^2+2m-8)-6(m+1)i$，…………（8分）

因为 z 在复平面内对应的点在第三象限，

所以 $\begin{cases}m^2+2m-8<0,\\6(m+1)>0,\end{cases}$ …………（10分）

解得 $-1<m<2$，

故实数 m 的取值范围是 $(-1,2)$. …………（12分）

19. **命题意图**　本题考查正弦定理和余弦定理的应用.

解析　（Ⅰ）由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B}-b=2b\sin B$，…………（2分）

整理得 $2\sin^2B+\sin B-1=0$，即 $(2\sin B-1)\cdot(\sin B+1)=0$，

解得 $\sin B=\frac{1}{2}$ 或 $\sin B=-1$（舍去），…………（4分）

又因为 $0<B<\frac{\pi}{2}$，所以 $B=\frac{\pi}{6}$. …………（6分）

（Ⅱ）由余弦定理得 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B=3^2+(\sqrt{3})^2-2\times3\times\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}=3$，…………（8分）

所以 $b=\sqrt{3}$. …………（9分）

再由正弦定理可得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，所以 $\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{3\times\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………（12分）

20. **命题意图**　本题考查棱锥的结构特征及相关计算，多面体与球的综合问题.

解析　（Ⅰ）由条件可知正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 4，

所以底面积为 $6\times\frac{1}{2}\times4^2\sin\frac{\pi}{3}=24\sqrt{3}$，…………（2分）

该正六棱锥的体积为 $\frac{1}{3}\times8\times24\sqrt{3}=64\sqrt{3}$. …………（3分）

正六棱锥的侧棱长为 $\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$，…………（4分）

侧面等腰三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{(4\sqrt{5})^2-2^2}=4\sqrt{19}$，…………（5分）

故该正六棱锥的侧面积为 $6\times4\sqrt{19}=24\sqrt{19}$. …………（6分）

（Ⅱ）球心 M 一定在直线 SO 上，设球 M 的半径为 R，

则 $R=MS=MB$，

又 $MB^2=OM^2+OB^2$，

所以 $R^2=(8-R)^2+4^2$，解得 $R=5$. ……（10 分）

所以球 M 的表面积为 $4\pi R^2=100\pi$，……（11 分）

体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{500}{3}\pi$. ……（12 分）

21. **命题意图** 本题考查平面向量的运算.

解析 （Ⅰ）$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$，

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$，……（2 分）

所以 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DE}=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2-\frac{13}{16}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}^2$

$=\frac{1}{4}\times4^2-\frac{13}{16}\times0-\frac{3}{4}\times4^2$

$=-8$. ……（5 分）

（Ⅱ）设 $\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AF}$，

则 $\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\lambda\overrightarrow{AD}=4\lambda\overrightarrow{AE}+\frac{3}{4}\lambda\overrightarrow{AD}$. ……（6 分）

因为 D,G,E 三点共线，所以 $4\lambda+\frac{3}{4}\lambda=1$，解得 $\lambda=\frac{4}{19}$，……（9 分）

则 $\overrightarrow{AG}=\frac{4}{19}\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{GH}=\frac{4}{19}\overrightarrow{BH}$，所以 $\overrightarrow{BG}=\frac{15}{19}\overrightarrow{BH}$，……（11 分）

即 $\mu=\frac{15}{19}$. ……（12 分）

22. **命题意图** 本题考查解三角形和三角恒等变换的综合应用.

解析 （Ⅰ）由条件得 $2\sin A\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=2\sin B-\sin C$，……（1 分）

由余弦定理得 $2\sin A\cos C=2\sin B-\sin C$. ……（2 分）

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $2\sin A\cos C=2\sin(A+C)-\sin C$，……（3 分）

得 $2\sin A\cos C=2\sin A\cos C+2\cos A\sin C-\sin C$，即 $\sin C=2\cos A\sin C$，……（4 分）

因为 $\sin C\neq0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，……（5 分）

又 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ……（6 分）

（Ⅱ）$\sin B+\sin C=\sin B+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{3}{2}\sin B=\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$. ……（8 分）

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，

所以 $0<\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2}$，且 $0<B<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$. ……（10 分）

所以 $\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{3}{2},\sqrt{3}\right]$，

即 $\sin B+\sin C$ 的取值范围是 $\left(\frac{3}{2},\sqrt{3}\right]$. ……（12 分）

— 5 —

关于我们