天一大联考
“顶尖计划”2020 届高中毕业班第三次考试
理科数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. D	2. C	3. A	4. C	5. B	6. B
7. D	8. B	9. C	10. C	11. A	12. A

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　14. $\frac{2}{5}$或$\frac{3}{5}$

15. 5　　16. $-\frac{9}{2}+8\ln 3$

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17.【命题意图】 本题考查平面向量和正弦定理等在解三角形中的应用.

【解析】 (Ⅰ)因为$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$, …………(1 分)

所以$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AD}^2=28$, …………(2 分)

即$b^2+c^2+2bc\cos A=28$, …………(3 分)

所以$c^2+4c-12=0$,解得$c=2$(负值舍去). …………(5 分)

(Ⅱ)由$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,可得$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{4}{4\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}$. …………(6 分)

因为$a>b$,所以$A>B$,所以$B=\frac{\pi}{6}$. …………(8 分)

所以$C=\pi-A-B=\frac{\pi}{2}$. …………(9 分)

所以$c=\sqrt{a^2+b^2}=8$. …………(11 分)

所以$\triangle ABC$的周长为$a+b+c=12+4\sqrt{3}$. …………(12 分)

18.【命题意图】 本题考查空间线面关系证明及利用空间向量计算二面角.

【解析】 (Ⅰ)依题意,底面$ABCD$是直角梯形,$AB\perp BC$,$AB=2CD$.

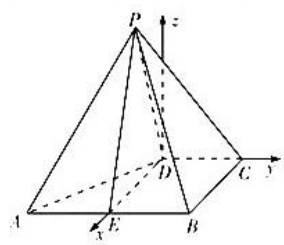
取AB的中点E,连接DE,PE, …………(1 分)

则$BE=CD$,$BE/\!/CD$,所以四边形$BCDE$为矩形,所以$BE\perp DE$. …………(2 分)

因为$\triangle PAB$为等边三角形,所以$AB\perp PE$. …………(3 分)

因为$PE\cap DE=E$,所以$AB\perp$平面PDE. …………(4 分)

因为$PD\subset$平面PDE,所以$AB\perp PD$. …………(5 分)



— 1 —

(Ⅱ)由(Ⅰ)知,$AB\perp$平面PDE,所以平面$ABCD\perp$平面PDE.

点P到平面$ABCD$的距离即点P到DE的距离.

因为$PD\perp PA$,$PD\perp AB$,$AB\cap PA=A$,所以$PD\perp$平面PAB,所以$PD\perp PE$.

在$Rt\triangle PDE$中,可得P到DE的距离为$\frac{PE\times PD}{DE}=\frac{2\sqrt{3}\times 2}{4}=\sqrt{3}$. …………(6分)

分别以$\overrightarrow{DE}$,$\overrightarrow{DC}$的方向为x轴,y轴的正方向,过点D垂直于平面$ABCD$的直线为z轴建立如图所示的空间直角坐标系$D-xyz$. …………(7分)

则$D(0,0,0)$,$B(4,2,0)$,$C(0,2,0)$,$P(1,0,\sqrt{3})$,

所以$\overrightarrow{PC}=(-1,2,-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{BC}=(-4,0,0)$.

设平面PBC的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-4x=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=-x+2y-\sqrt{3}z=0.\end{cases}$ 取$z=2$,则$\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{3},2)$. …………(9分)

而平面PAB的一个法向量为$\overrightarrow{DP}=(1,0,\sqrt{3})$, …………(10分)

则$\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{DP}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{DP}|}=\frac{(0,\sqrt{3},2)\cdot(1,0,\sqrt{3})}{\sqrt{3+4}\times\sqrt{1+3}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

由图可知,二面角$A-PB-C$为钝角,所以所求的余弦值为$-\frac{\sqrt{21}}{7}$. …………(12分)

19.【命题意图】 本题考查椭圆的标准方程以及直线与椭圆的综合问题.

【解析】 (Ⅰ)由题意可知$\begin{cases}2b=2\sqrt{3},\\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\\ c=1.\end{cases}$

故椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………(4分)

(Ⅱ)设直线$l:y=kx+m$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

联立直线与椭圆方程,消去y得$(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$.

则$\Delta=(8km)^2-4(3+4k^2)(4m^2-12)>0$,整理得$m^2<4k^2+3$. ① …………(6分)

由根与系数关系得$x_1+x_2=-\frac{8km}{3+4k^2}$,

则$\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{4km}{3+4k^2}$,$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{3m}{3+4k^2}$,即$AB$中点的坐标为$\left(-\frac{4km}{3+4k^2},\frac{3m}{3+4k^2}\right)$. …………(8分)

又线段AB的垂直平分线方程为$y=-\frac{1}{k}\left(x-\frac{1}{3}\right)$,所以$\frac{3m}{3+4k^2}=-\frac{1}{k}\left(-\frac{4km}{3+4k^2}-\frac{1}{3}\right)$.

化简可得$m=-\frac{4k^2+3}{3k}$. ② …………(10分)

由①②得$\frac{(4k^2+3)^2}{9k^2}<4k^2+3$,因为$4k^2+3>0$,所以$4k^2+3<9k^2$,

所以$k^2>\frac{3}{5}$,得$k<-\frac{\sqrt{15}}{5}$或$k>\frac{\sqrt{15}}{5}$.

所以k的取值范围是$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{15}}{5},+\infty\right)$. …………(12分)

20.【命题意图】 本题考查利用导数研究函数的性质.

【解析】 (Ⅰ)因为 $f(x)=x^2+2ax-4a^2\ln x$,所以 $x\in(0,+\infty)$, ……………………………………(1分)

所以 $f'(x)=\dfrac{2x^2+2ax-4a^2}{x}=\dfrac{2(x-a)(x+2a)}{x}$. ……………………………………(2分)

①当 $a>0$ 时,由 $f'(x)>0$ 得 $x>a$;由 $f'(x)<0$ 得 $0<x<a$.

故 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减,在 $(a,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………(4分)

②当 $a<0$ 时,由 $f'(x)>0$ 得 $x>-2a$;由 $f'(x)<0$ 得 $0<x<-2a$.

故 $f(x)$ 在 $(0,-2a)$ 上单调递减,在 $(-2a,+\infty)$ 上单调递增.

综上,①当 $a>0$ 时,$f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减,在 $(a,+\infty)$ 上单调递增;

②当 $a<0$ 时,$f(x)$ 在 $(0,-2a)$ 上单调递减,在 $(-2a,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………(5分)

(Ⅱ)若 $a=0$,不等式转化为当 $x\geqslant 1$ 时,$x\ln x-m(x^2-1)\leqslant 0$ 恒成立.

令 $F(x)=x\ln x-m(x^2-1)$,则 $F'(x)=\ln x+1-2mx$.

令 $G(x)=\ln x+1-2mx$,则 $G'(x)=\dfrac{1}{x}-2m$. ……………………………………(6分)

①当 $m\leqslant 0$ 时,对任意 $x\in[1,+\infty)$,恒有 $F'(x)=\ln x+1-2mx>0$,

所以 $F(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $F(x)\geqslant F(1)=0$,所以 $m\leqslant 0$ 不合题意. ……………………………………(7分)

②当 $m\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时,因为 $x\geqslant 1$,所以 $\dfrac{1}{x}\leqslant 1$,所以 $\dfrac{1}{x}-2m\leqslant 0$,即 $G'(x)\leqslant 0$,

所以 $G(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减,所以 $G(x)\leqslant G(1)=1-2m\leqslant 0$,即 $F'(x)\leqslant 0$,

所以 $F(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减,所以 $F(x)\leqslant F(1)=0$,

所以 $m\geqslant\dfrac{1}{2}$ 符合题意. ……………………………………(9分)

③当 $0<m<\dfrac{1}{2}$ 时,令 $G'(x)=\dfrac{1}{x}-2m>0$,解得 $1\leqslant x<\dfrac{1}{2m}$,令 $G'(x)=\dfrac{1}{x}-2m<0$,解得 $x>\dfrac{1}{2m}$.

所以 $G(x)$ 在 $\left[1,\dfrac{1}{2m}\right]$ 上单调递增,所以 $G(x)\geqslant G(1)=1-2m>0$,即 $F'(x)>0$,

所以 $F(x)$ 在 $\left[1,\dfrac{1}{2m}\right]$ 上单调递增,所以当 $x\in\left[1,\dfrac{1}{2m}\right]$ 时,$F(x)\geqslant F(1)=0$,

故 $0<m<\dfrac{1}{2}$ 不合题意. ……………………………………(11分)

综合①②③可知,实数 m 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$. ……………………………………(12分)

21.【命题意图】 本题考查概率的计算及随机变量的分布列和数学期望.

【解析】 (Ⅰ)设"轮船拍发 k 次呼叫信号,基站至少收到1次信号"为事件 A,则其对立事件 $\bar{A}$ 表示"轮船拍发 k 次呼叫信号,基站收到0次信号",其中 k 为正整数.

要使 $P(A)>0.99$,则需 $P(\bar{A})<0.01$.

由题可知 $P(\bar{A})=(1-0.2)^k=0.8^k$. ……………………………………(2分)

因为 $0.8^{20}=\left(\dfrac{4}{5}\right)^{20}=\dfrac{4^{20}\times 2^{20}}{5^{20}\times 2^{20}}=\dfrac{2^{60}}{10^{20}}\approx 1.16\times 10^{-2}=0.0116>0.01$,

而 $0.8^{21}\approx 0.0116\times 0.8=0.00928<0.01$, ……………………………………(4分)

又因为 $k\in\mathbf{N}^*$,所以 $k\geqslant 21$,即轮船至少要拍发21次呼叫信号. ……………………………………(5分)

(Ⅱ)若第1次呼叫信号就被基站收到,则轮船16秒后会收到回答信号从而停止拍发,16秒内轮船会继续拍发3次,即一共拍发了4次呼叫信号;

若前 $i-1(2\leqslant i\leqslant 17)$ 次呼叫信号都没有被基站收到，第 i 次呼叫信号被基站收到，与上面同理，停止拍发时轮船一共拍发了 $i+3$ 次呼叫信号；

若前 17 次呼叫信号都没有被基站收到，轮船会拍发 21 次后停止.

所以随机变量 X 的分布列如下：

X	4	5	6	…	19	20	21
P	0.2	0.8×0.2	$0.8^2\times 0.2$	…	$0.8^{15}\times 0.2$	$0.8^{16}\times 0.2$	0.8^{17}

……………………………………………………………………………………………… (8 分)

所以 $E(X)=4\times 0.2+5\times 0.8\times 0.2+6\times 0.8^2\times 0.2+\cdots+20\times 0.8^{16}\times 0.2+21\times 0.8^{17}$

$=0.8\times 1+1\times 0.8+1.2\times 0.8^2+\cdots+4\times 0.8^{16}+21\times 0.8^{17}$，…………………………… (9 分)

所以 $0.8E(X)=0.8\times 0.8+1\times 0.8^2+1.2\times 0.8^3+\cdots+4\times 0.8^{17}+16.8\times 0.8^{17}$.

两式相减得 $0.2E(X)=0.8+0.2\times 0.8+0.2\times 0.8^2+\cdots+0.2\times 0.8^{16}+0.2\times 0.8^{17}$

$$=0.8+0.2\times\frac{0.8\times(1-0.8^{17})}{1-0.8}=1.6-0.8^{18},$$

所以 $E(X)=8-5\times 0.8^{18}=8-5\times\dfrac{0.8^{20}}{0.8^2}\approx 8-\dfrac{5\times 0.011\ 6}{0.64}\approx 7.91$. ……………………………… (12 分)

22.【命题意图】 本题考查参数方程、极坐标方程等转化问题，直线与圆的位置关系.

【解析】 (Ⅰ)曲线 C 的参数方程 $\begin{cases}x=-2+3\cos\varphi,\\ y=1+3\sin\varphi\end{cases}$ 化为普通方程为 $(x+2)^2+(y-1)^2=9$. ……… (2 分)

由 $\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta-5=0$，$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 可得，

直线 l 的直角坐标方程为 $x-2y-5=0$. ……………………………………………………………… (4 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 l 的直角坐标方程为 $x-2y-5=0$，$C(-2,1)$.

设直线 l'：$x-2y+m=0$，由题知 $m\in\mathbf{Z}$.

所以 C 到直线 l' 的距离 $d=\dfrac{|-2-2+m|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|m-4|}{\sqrt{5}}$，……………………………………………… (6 分)

所以 $|AB|=2\sqrt{9-\dfrac{(m-4)^2}{5}}$，……………………………………………………………… (7 分)

所以 $\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{9-\dfrac{(m-4)^2}{5}}\cdot\dfrac{|m-4|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$，……………………………………………… (8 分)

整理得 $(m-4)^4-45(m-4)^2+500=0$，所以 $(m-4)^2=20$ 或 $(m-4)^2=25$，

因为 $m\in\mathbf{Z}$，所以 $m=-1$ 或 $m=9$. ……………………………………………………… (9 分)

所以直线 l' 的方程为 $x-2y-1=0$ 或 $x-2y+9=0$. ………………………………………… (10 分)

23.【命题意图】 本题考查绝对值不等式的解法及基本不等式的应用.

【解析】 (Ⅰ)由题意得 $f(x)=\begin{cases}1, x\leqslant\dfrac{2}{5},\\ -10x+5, \dfrac{2}{5}<x\leqslant\dfrac{3}{5},\\ -1, x>\dfrac{3}{5}.\end{cases}$

所以不等式 $f(x)>3-4x$ 可化为 $\begin{cases}x\leqslant\dfrac{2}{5},\\ 1>3-4x\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\dfrac{2}{5}<x\leqslant\dfrac{3}{5},\\ -10x+5>3-4x\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>\dfrac{3}{5},\\ -1>3-4x,\end{cases}$

解得 $x>1$. …………………………………………………………（4 分）

所以不等式 $f(x)>3-4x$ 的解集为 $(1,+\infty)$. ……………………………（5 分）

（Ⅱ）$f(x)=|5x-3|-|5x-2|\leq|5x-3+2-5x|=1$. ……………………（6 分）

因为 $a,b\in\mathbf{R}^+$，$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=2$，

所以 $2a+b=\frac{1}{2}(2a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(4+\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq\frac{1}{2}\left(4+2\sqrt{\frac{4a}{b}\cdot\frac{b}{a}}\right)=4$，

当且仅当 $\frac{4a}{b}=\frac{b}{a}$，即 $a=1,b=2$ 时取等号. ……………………（8 分）

因为 $2a+b\geq f(x)+2m^2+1$ 恒成立，

所以 $4\geq1+2m^2+1$，解得 $-1\leq m\leq1$，

所以实数 m 的取值范围是 $[-1,1]$. ……………………………………（10 分）